

Modélisation par poutre équivalente anisotrope des hydrofoils composites : du couplage fluide-structure vers l'optimisation des performances hydrodynamiques

Antoine Faye

▶ **To cite this version:**

Antoine Faye. Modélisation par poutre équivalente anisotrope des hydrofoils composites : du couplage fluide-structure vers l'optimisation des performances hydrodynamiques. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Brest, 2025. Français. ⟨NNT : 2025BRUN0040⟩. ⟨tel-05509614⟩

HAL Id: tel-05509614

https://theses.hal.science/tel-05509614v1

Submitted on 13 Feb 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

COLLEGE SCIENCES
DOCTORAL DE LA MER
BRETAGNE ET DU LITTORAL

Université de Bretagne Occidentale

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE
DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ECOLE DOCTORALE N° 598
Sciences de la Mer et du Littoral
Spécialité : *Mécanique, génie mécanique, mécanique des fluides et énergétique*

Par

Antoine FAYE

Modélisation par poutre équivalente anisotrope des hydrofoils composites : du couplage fluide-structure vers l'optimisation des performances hydrodynamiques

Thèse présentée et soutenue à l'École Navale (Lanvéoc), le 16/07/2025
Unité de recherche : Institut de Recherche et d'Études Navales

Rapporteurs avant soutenance :

M. Jean-François DEÜ Professeur des universités, Conservatoire national des arts et métiers, LMSSC
M. Pascal CASARI Professeur des universités, Nantes Université

Composition du Jury :

Président :	M. Stéphane SIRE	Professeur des universités, Université de Bretagne Occidentale
Examinateurs :	M. Alban LEROYER	Maître de conférences, École Centrale de Nantes
	Mme. Angela VINCENTI	Professeure des universités, Sorbonne Université
Dir. de thèse :	M. Jacques-André ASTOLFI	Professeur des universités, École Navale (IRENav), Brest

Invité(s) :

M. Matthieu SACHER	Maître de conférences, ENSTA
M. Frédéric HAUVILLE	Maître de conférences, École Navale (IRENav)
M. Alain NÊME	Maître de conférences, ENSTA

Remerciements

La réalisation de cette thèse a été rendue possible grâce à une multitude de personnes que je tiens à remercier à travers ces quelques lignes.

Tout d'abord, je tiens à remercier Jules Poncin, qui m'a accueilli pour mon stage de fin d'études et m'a initié à la modélisation numérique. Plus généralement, je souhaite exprimer ma profonde gratitude à l'entreprise K-Epsilon, sans qui ce projet de thèse n'aurait jamais vu le jour.

Je suis également très reconnaissant envers mes encadrants, Matthieu Sacher, Frédéric Hauville et Jacques-André Astolfi, qui m'ont grandement soutenu et énormément appris durant ces années de thèse. Je remercie aussi chaleureusement Alain Nême et Paolo Perali, qui m'ont beaucoup aidé, même s'ils ne faisaient pas officiellement partie de mon encadrement.

Plus globalement, je remercie l'IRDL et l'IRENav, qui m'ont accueilli et ont fourni les ressources nécessaires à la réalisation de cette thèse. J'adresse également un grand merci au personnel de ces entités, en particulier à l'équipe des doctorants de l'IRENav, pour m'avoir offert un cadre de travail des plus agréables.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers mes amis et ma famille, qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure. Sans eux, je ne serais probablement pas allé au bout de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Nomenclature **7**

Introduction générale **8**

1 État de l'art **11**
1.1 Historique 11
1.2 Écoulement autour d'un foil 13
1.3 Modélisation numérique de l'écoulement 17
1.4 Matériaux composites et modes de déformation d'un foil 18
1.5 Modélisation numérique de la réponse élastique 19
1.6 Interaction Fluide-Structure 20
1.7 Optimisation 21
1.8 Contribution de la thèse 22

2 Moyens expérimentaux **23**
2.1 Présentation des foils expérimentaux 23
2.2 Essais en air 25
2.2.1 Montage expérimental 25
2.2.2 Mesure du déplacement global du foil 27
2.2.3 Mesure du déplacement local du foil 31
2.3 Essais en bassin 33
2.4 Conclusion 35

3 Modélisation d'un hydrofoil souple **39**
3.1 Généralités sur les éléments finis 39
3.1.1 Cinématique et mesures de déformation 40
3.1.2 Principe des travaux virtuels 42
3.1.3 Mesures de contraintes 43
3.1.4 Opérateur de Hooke 43
3.1.5 Discrétisation des quantités cinématiques 45

3.1.6 Équation du mouvement 50
3.1.7 Analyse modale 53
3.2 Modélisation 3D 54
3.2.1 Élément fini 3D C3D8R 55
3.2.2 Élement fini 2D STRI3 55
3.2.3 Mise en place du modèle 57
3.3 Modélisation 1D 61
3.3.1 Analyse de sections 63
3.3.2 Modèle de poutre 81
3.3.3 Mise en place du modèle 95
3.4 Modélisation Fluide : PUFFIn 98
3.4.1 PUFFIn 99
3.4.2 Couplage PUFFIn/Abaqus™ 102
3.5 Conclusion 107

4 Validation des modèles numériques 109
4.1 Essais en air 109
4.1.1 Temps de calcul 109
4.1.2 Propriétés équivalentes des sections 110
4.1.3 Déformation globale 112
4.1.4 Déformation locale 118
4.1.5 Gauchissement des sections 121
4.1.6 Influence du rapport d'aspect 124
4.1.7 Reconstruction des contraintes dans la section 126
4.1.8 Approche modale 127
4.2 Essais en bassin 129
4.2.1 Polaire du foil 129
4.2.2 Étude expérimentale de l'influence de l'immersion 132
4.2.3 Validation numérique 135
4.3 Conclusion 140

5 Optimisation structurelle et géométrique d'un hydrofoil souple 142
5.1 Méthode d'optimisation 142
5.2 Mise en place du problème d'optimisation 146
5.2.1 Structure et géométrie 146

5.2.2 Positionnement dynamique 149
5.2.3 Fonction objectif 150
5.3 Résultats 150
5.4 Conclusion 155

6 Validations des développements numériques 156
6.1 Validation du modèle d'analyse de sections 156
6.2 Validation du modèle de poutre 160
6.3 Conclusion 163

Conclusion et Perspectives 165

Bibliographie 171

Annexe 1 : Relation entre les configurations initiale et déformée 184

Annexe 2 : Équilibre des efforts 187

Annexe 3 : Développement du PTV 190

Annexe 4 : Formulation alternative du PTV 192

Annexe 5 : Discrétisation des travaux virtuels sur un élément 196

Annexe 6 : Matrice de raideur tangente 200

Annexe 7 : Discrétisation du travail virtuel linéique pour un élément 205

Annexe 8 : Variation virtuelle des mesures de déformations généralisées 208

NOMENCLATURE

BTC Bend-Twist Coupling

CFD Computational Fluid Dynamics

CFT Couplage Flexion-Torsion

HPP Hypothèse des Petites Perturbations

IFS Interaction Fluide-Structure

MEF Méthode des éléments finis

MFN Mécanique des Fluides Numérique

PTV Principe des Travaux Virtuels

QS Quasi-Statique

RANS Reynolds Averaged Navier-Stokes

UD UniDirectionnel

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis plusieurs décennies maintenant, les hydrofoils se démocratisent dans le domaine naval, et cela à différentes échelles. Les hydrofoils sont des profils portants présents sous des engins navals permettant leur sustentation (ou, à minima, une réduction de leur tirant d'eau) et ainsi, une diminution significative de leurs frottements avec l'eau.

Aujourd'hui, les hydrofoils sont présents sur différents types de supports tels que des navires de transport de passagers, des voiliers de course ou encore des planches à voile (windfoil). Cette révolution technologique donne lieu à de nombreuses études portant sur une grande variété de phénomènes physiques, tels que les vibrations, les effets de surface libre, la ventilation, la laminarité ou encore la cavitation.

En conséquence, l'optimisation de ce type d'appendice peut être réalisée en considérant différents objectifs, tels que la minimisation de la traînée, la réduction de l'apparition de la cavitation ou encore la maximisation de la stabilité du foil.

Ces optimisations peuvent être conduites de manière *empirique* où les architectes identifient les meilleurs designs de foils par expérience. Cette approche, adoptée historiquement pour la conception de navires, est coûteuse en ressources et en temps car elle repose sur la conception de prototypes. L'important progrès des moyens informatiques survenu ces dernières décennies permet de pallier à ce problème via des méthodes de modélisation numérique.

Sur certains navires, les foils sont soumis à d'importants efforts hydrodynamiques et se déforment donc de manière significative. Dans ce cas, il est primordial de modéliser les Interactions Fluide-Structure (IFS) des foils en écoulement. Pour concevoir un foil rigide, les efforts hydrodynamiques auxquels il est soumis sont estimés numériquement puis sa structure est dimensionnée à partir de ces efforts, en cherchant à minimiser ses déformations.

Pour des foils souples, une approche couplée doit être adoptée, où les IFS d'un foil sont prédites en alternant entre un solveur fluide et structure. Ce protocole permet de rendre compte de la modification de l'écoulement fluide autour du foil déformé, qui peut dans certaines conditions, avoir un impact important sur les efforts hydrodynamiques générés par le foil.

Le sujet de cette thèse porte sur **la modélisation par poutre équivalente anisotrope des hydrofoils composites, afin d'optimiser leurs performances hydrodynamiques**. Dans cette thèse, un modèle numérique dédié permettant une estimation rapide des performances d'un foil souple est développé. Ensuite, cet outil est validé puis exploité pour étudier des foils souples avec comme objectif la détermination des paramètres structurels et géométriques maximisant la performance du foil. La validation de l'outil numérique est rendue possible grâce à un modèle éléments finis haute-fidélité et deux campagnes expérimentales réalisées au cours de cette thèse.

Le modèle numérique retenu dans cette thèse, de basse-fidélité, est un couplage entre un modèle de poutre équivalente et un code fluide parfait, adapté pour l'optimisation en raison de son faible coût de calcul. Le logiciel permettant la prédiction des efforts hydrodynamiques, *PUFFIn*, est développé à l'ENSTA Bretagne. Les modèles éléments finis (haute et basse-fidélité) permettant l'obtention des résultats présentés dans ce manuscrit de thèse sont implémentés dans le logiciel commercial Abaqus^{TM}.

Ces travaux s'intéressent à des foils en matériaux composites, caractérisés par des propriétés mécaniques anisotropes. En choisissant judicieusement l'empilement des plis composites d'un foil, des couplages entre les modes de déformation du matériau peuvent émerger. Le plus impactant pour un foil est le Couplage Flexion-Torsion (CFT), impactant directement l'angle d'attaque du foil (et en conséquence son chargement) lorsque celui-ci se déforme. L'objectif est d'exploiter ce phénomène pour générer des structures de foils *auto-adaptatives*, voyant leurs formes changer en navigation, permettant alors d'étendre la plage de vitesse où ceux-ci sont performants.

Ce manuscrit se décompose en 6 chapitres dont le contenu est détaillé dans ce qui suit. Le chapitre 1 introduit le sujet en proposant un bref historique des foils et en contextualisant les travaux de cette thèse. Conjointement, des rappels sur les principaux phénomènes physiques impliqués dans la modélisation IFS de foils sont donnés.

Dans le chapitre 2, quatre foils utilisés pour les validations expérimentales sont présentés. Ces foils ont la même géométrie mais une orientation de fibre différente, ce qui induit des différences significatives de raideur et de CFT. Ensuite deux campagnes expérimentales sont présentées. La première est réalisée en air en suspendant des masses aux différents foils, l'objectif étant de valider le solveur structure. Une seconde série d'essais est réalisée sur un foil dans le bassin à courant de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer, permettant la validation du couplage IFS mis en place.

Ensuite, des rappels sur la méthode des éléments finis sont présentés dans le chapitre 3

avec le modèle éléments finis haute-fidélité permettant de reproduire les essais en air (mis en place dans Abaqus^{TM}). La modélisation d'un foil comme une poutre équivalente est ensuite détaillée, celle-ci repose sur la détermination des propriétés équivalentes (raideurs et couplages) des sections du foil le long de son envergure et la définition d'éléments poutres représentatif de la structure anisotrope du foil à partir de ses propriétés équivalentes. La mise en place dans Abaqus^{TM} du modèle de poutre équivalente représentatif des essais en air est également détaillée. Le chapitre 3 se clôture en présentant le couplage IFS entre les modèles éléments finis (haute et basse-fidélité) et le solveur fluide parfait *PUFFIn*.

Le chapitre 4 confronte les résultats expérimentaux et les différents résultats numériques. Ce chapitre met en avant le bon accord entre les expériences et les modèles numériques. Dans ce chapitre sont également confrontés des résultats purement numériques, obtenus avec les modèles éléments finis haute et basse-fidélité, ce qui permet de valider numériquement la prédiction de quantités non évaluées dans les campagnes expérimentales (modes propres, contraintes mécaniques, influence de l'allongement, etc.). Les différents résultats permettent de valider le couplage IFS développé dans cette thèse.

Ce modèle est ensuite exploité dans le chapitre 5 pour optimiser la structure et la géométrie d'un hydrofoil souple. La méthode d'optimisation retenue dans cette thèse est brièvement détaillée au début du chapitre 5. Un problème d'optimisation *multi-objectif* de la géométrie et de la structure d'un foil souple est ensuite posé puis résolu. Les résultats de l'optimisation mettent en avant l'existence de designs souples offrant de meilleures performances que des designs de géométries équivalentes mais rigides.

Pour finir, une validation numérique-numérique des développements réalisés dans cette thèse est présentée dans le chapitre 6. Deux cas de validation sont considérés, un premier pour valider la détermination des propriétés équivalentes d'une section de foil en matériaux composites et une seconde pour valider le modèle éléments finis de poutre équivalente. Les résultats exposés dans ce chapitre 6 montrent que pour la suite des travaux, le logiciel Abaqus^{TM} n'est plus nécessaire. Ce qui permet de s'affranchir des contraintes liées à l'utilisation d'un logiciel commercial. Les perspectives de ces travaux sont finalement discutées dans la conclusion de ce manuscrit.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Historique

Les hydrofoils, plus communément appelés *foils*, sont des profils portants placés dans l'eau dont l'effort de portance permet la sustentation d'un engin naval. L'utilisation de foils permet alors une réduction drastique de la résistance à l'avancement, que ce soit pour la composante visqueuse, de forme ou de vague. La réduction de la résistance de vague se traduit également par une amélioration du confort du navire (Godø et al. 2024). Les premiers concepts d'hydrofoils sont apparus à la fin du 19e siècle avec les travaux d'Emmanuel Denis Fargot, qui a eu l'idée en 1869 de placer des profils portant sous la ligne d'eau d'un navire à rames dans le but de réduire ses frottements avec l'eau. Il faudra cependant attendre 1898 pour voir apparaître le premier prototype fonctionnel de navire à foils, imaginé et développé par le pionnier de l'aviation Enrico Forlanini. Ce navire, illustré dans la figure 1.1 était maintenu en dehors de l'eau à l'aide de foils à *échelle* disposés à la proue et la poupe du navire.

Les foils à échelle permettent de réguler la portance de manière passive. En effet, plus le navire accélère, plus la portance des fois à échelle tend à faire sortir le navire de l'eau. Ce faisant, les ailes supérieures des échelles sortent de l'eau, régulant ainsi la portance générée par les foils en diminuant la surface portance effective. Les navires à foil, couramment appelés *foileurs*, ont continué à être étudiés au début du 20e siècle avec notamment les travaux d'Alexander Graham Bell, qui furent les premiers à mettre en avant des problématiques de cavitation lorsque les foils opèrent à grande vitesse. Des recherches ont été conduites tout au long du 20e siècle pour améliorer les designs de foils, avec des applications militaires (patrouilleurs à hautes vitesses) et civiles (transport de passagers). Cependant, les matériaux disponibles à l'époque ne permettaient pas le développement de foils aussi performants qu'aujourd'hui.

L'intérêt pour les foils revient dans les années 1980 lorsque le foileur le *Paul Ricard*, imaginé et conçu par Éric Tabarly et Alain De Bergh, bat le record de la traversée de



FIGURE 1.1 – Hydroptère conçu en 1906 par Enrico Forlanini. Illustration issue de (BEN 2024).

l'Atlantique en 1980. Depuis, le développement des matériaux composites a permis un essor des foileurs en permettant la conception de foils à la fois rigides et légers. Cet essor est d'autant plus visible depuis les années 2010 depuis lesquelles l'utilisation des foils est devenue commune dans le monde de la voile de course. La première course moderne ayant intégré des foileurs est la coupe de l'America en 2013 avec ses AC72. Les foileurs ont également été intégrés sur les Imoca pour le Vendée Globe à partir de 2016 (cf. figure 1.2).



FIGURE 1.2 – Imoca Safran 2, courant dans le Vendée Globe 2016. Illustration issue de (MENARD 2019).

Les foils se développent également dans le monde de la voile légère, on peut prendre

comme exemple la démocratisation du WindFoil et du KiteFoil, ayant respectivement remplacé la planche à voile et le Kitesurf pour les JO de 2024. Le support olympique est l'IQFoil, développé et conçu par StarBoard, illustré par la figure 1.3.

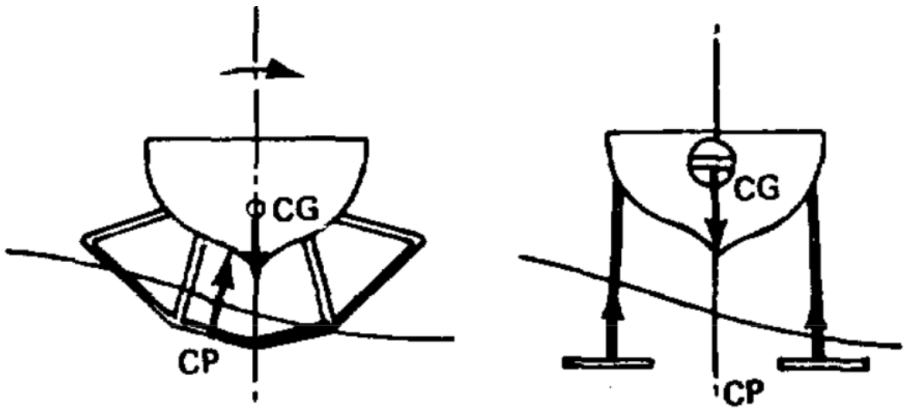


FIGURE 1.3 – IQ Foil, support olympique depuis les JO 2024. Illustration issue de (ARQUIN 2022).

Une distinction est faite entre les foils perçant la surface libre et les foils immergés, tous deux illustrés par la figure 1.4. Comme leurs noms l'indiquent, les foils immergés sont caractérisés par des plans porteurs restant sous la surface libre, induisant alors une surface portante constante. À l'inverse, des foils perçant la surface libre tels que les foils *Dali* voient leur surface portante diminuer au fur et à mesure que le navire sort de l'eau. De tels foils offrent un système de régulation passive car si la portance générée par le foil est trop élevée, le foil sort de l'eau et la réduction de sa surface effective induit une réduction de portance. Néanmoins, ces foils sont plus susceptibles de faire émerger des phénomènes de ventilation. Dans cette thèse, les travaux se concentrent sur des foils immergés.

1.2 Écoulement autour d'un foil

L'écoulement fluide autour d'une surface portante immergée induit une dépression sur son extrados et une surpression sur son intrados, générant un effort de portance orienté, par définition, perpendiculairement à la vitesse de l'écoulement. Cet effort de portance est communément exprimé de manière adimensionnelle à l'aide du coefficient de portance C_L défini ci-dessous :



Foil perçant la surface libre

Foil immergé

FIGURE 1.4 – Illustration de foils immergés et perçant la surface libre, adaptée de (JOHNSTON 1985) – *CG* : centre de gravité, *CP* : portance du foil.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_f S V^2} \tag{1.1}$$

Dans l'équation (1.1), la portance L est adimensionnalisée avec la masse volumique du fluide ρ_f, la surface effective de l'aile S et la vitesse de l'écoulement V. L'angle d'attaque d'un foil et sa forme impactent directement son coefficient de portance. Certains foils possèdent une forme adaptable en navigation, rendue possible grâce à des systèmes de volets (*flaps* en anglais). L'exemple du *Moth* est retenu pour illustrer ce système de volet (cf. figure 1.5). Pour cet exemple, le foil central est équipé d'un volet à proximité de son bord de fuite, dont la position est imposée par le palpeur du foil de manière à réguler la portance pour que le bateau reste dans l'eau.

La figure 1.6 illustre l'évolution du coefficient de portance pour un foil immergé avec des volets. Les coefficients de portance y sont tracés en fonction de l'angle d'attaque pour 5 angles de volet δ. Cette figure montre l'évolution linéaire du coefficient de portance pour les petits angles d'attaque ainsi que l'impact sur la portance de la modification de forme (pilotée par le volet) du foil.

La figure 1.6 met également en avant une chute de portance intervenant pour les grands angles d'attaque, attribuée à différents phénomènes :

— Décrochage ;

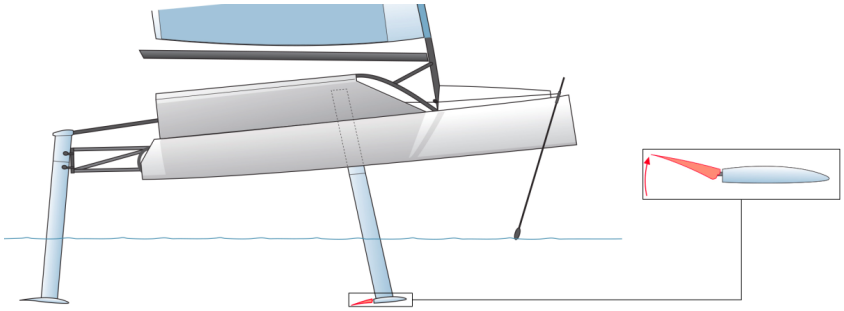


FIGURE 1.5 – Illustration des foils d'un foileur de type *Moth* , adaptée de (HILLMAN 2018).

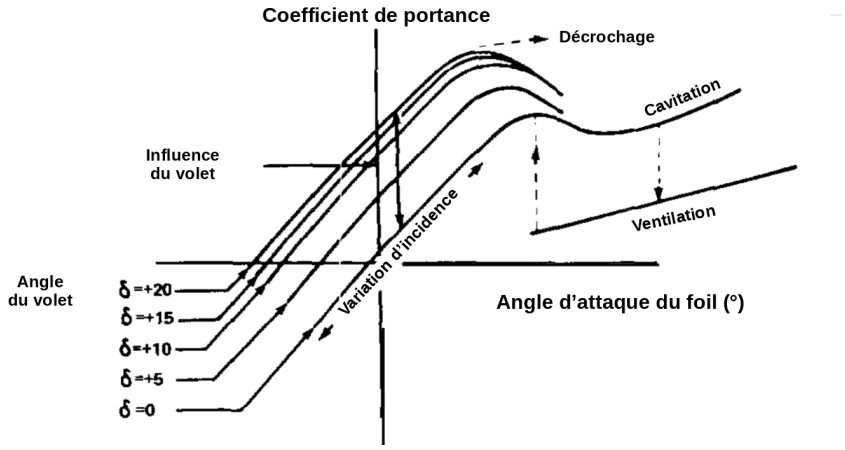


FIGURE 1.6 – Variation de la portance d'un foil immergé en fonction de son angle d'incidence et de son angle de volet, adaptée de (JOHNSTON 1985).

— Cavitation ;
— Ventilation.

Dans cette thèse, les conditions de navigation des foils étudiées sont définies de manière à éviter l'apparition de ces trois phénomènes. Afin de réguler la portance d'un Moth de foil accélérant en se basant sur la courbe de portance de la figure 1.6 (et en considérant un angle d'attaque constant), une solution est de réduire l'angle de volet du foil, ce qui réduira directement son coefficient de portance et sa portance. Ce système de régulation est complexe car il nécessite l'installation d'un palpeur et d'un lien entre celui-ci et le volet.

Ces travaux de thèse sont motivés par le développement de designs de foils souples se régulant de manière passive. Dans le cas d'un foil rigide avec une portance non-nulle, une accélération de l'écoulement induit forcément une augmentation de la portance (en l'absence de décrochage, cavitation ou ventilation) pouvant conduire dans le pire des cas à une sortie de l'eau du foil, ce que l'on cherche impérativement à éviter.

Un foil souple générant une portance non nulle est caractérisé par une déformation non-nulle. Comme pour le foil rigide, une accélération de l'écoulement induit une augmentation de la portance. Cette augmentation tend à augmenter la déformation du foil. En choisissant judicieusement la structure du foil, il est possible d'imaginer des structures de foils qui, une fois déformées, voient leurs angles d'attaque augmenter ou diminuer. Ce phénomène peut être rendu possible en choisissant des structures composites présentant un CFT non négligeable. Cette technique de régulation de portance a été intensivement étudiée dans le domaine de l'aéronautique (de Goeij et al. 1999 ; Bottasso et al. 2012).

Les travaux de cette thèse se concentrent sur des foils de sustentation, ayant pour objectif de générer un effort de portance portant un engin naval possédant un moyen de propulsion (vélique pour l'exemple du Moth). Il est également possible d'utiliser des foils comme un moyen de propulsion en s'inspirant du mouvement des nageoires des poissons (Triantafyllou et al. 2004). En effet, en combinant un mouvement de pilonnement et de tangage, un profil portant est capable de générer un effort de poussée exploitable pour propulser un engin naval (Mivehchi et al. 2016). Ce mode de propulsion est actuellement étudié et testé par l'entreprise Bluefins avec un prototype rigide (Louis et al. 2025). Ce phénomène peut également être exploité de manière inverse pour concevoir un hydrogénérateur. En effet, il est possible de récupérer l'énergie du mouvement de pilonnement et de tangage d'un foil placé dans un écoulement (Boudreau et al. 2020 ; Liu et al. 2020).

Les travaux de cette thèse pourraient permettre d'étudier le potentiel gain de per-

formance associé à l'utilisation d'un hydrofoil souple pour ce système de propulsion (ou de récupération d'énergie). On peut s'inspirer des ailerons souples des poissons permettant une meilleure transmission de l'énergie du poisson pour la propulsion (Kumar et al. 2025). Ce type de phénomène est déjà appliqué pour la conception des palmes de natation.

1.3 Modélisation numérique de l'écoulement

La modélisation de l'écoulement fluide autour du foil est réalisée de manière numérique, on parle alors de Mécanique des Fluides Numérique (MFN) ou de *Computational Fluid Dynamics* (CFD) en anglais. Dans cette thèse, les foils étudiés évoluent proche de la surface libre, qui a un impact significatif sur l'écoulement (Ausman 1954 ; Duncan 1981 ; Ni et al. 2021) et qu'il faut donc modéliser. Pour ce faire, différentes méthodes existent, chacune caractérisée par un niveau de complexité et de fidélité différent.

Par exemple, une méthode de résolution haute-fidélité communément utilisée pour modéliser des écoulements autour de foils est la méthode RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*). Les calculs RANS permettent entre autres de représenter le champ de vague généré par un foil opérant près de la surface libre (Pernod et al. 2023 ; Karim et al. 2014 ; Di Mascio et al. 2007) mais également la ventilation (Matveev et al. 2019 ; Basic et al. 2020) et la cavitation (Leroux et al. 2005 ; Perali et al. 2024a).

Ces méthodes sont cependant coûteuses en temps, c'est pourquoi des méthodes basse-fidélité sont également développées, notamment pour résoudre des problèmes d'optimisation. Dans cette thèse, la méthode basse-fidélité retenue est basée sur la méthode des éléments frontières (Hess et al. 1964) où *Boundary Element Method* (BEM) en anglais, implémentée dans le logiciel *PUFFIn*, développé à l'ENSTA Bretagne, par un post-doctorant financé par les projets OptiFoil et UNIFoil (Perali et al. 2024b). La BEM permet également l'étude des effets de surfaces libres induit par un foil (S. Bal et al. 2002 ; Sakir Bal 2023). Ce modèle n'est cependant pas capable de modéliser des champs de vagues déferlantes (Lachaume et al. 2003).

1.4 Matériaux composites et modes de déformation d'un foil

Les matériaux composites ont largement contribué à l'essor des foils ces dernières années car ils offrent un bon compromis entre rigidité et légèreté. L'appellation matériaux composites est très vaste car c'est par définition la combinaison de plusieurs matériaux, dans le but d'obtenir un matériau présentant de meilleures propriétés (thermiques, mécaniques, etc.). Dans le livre de (Vinson et al. 2002), 5 catégories de composites sont identifiées telles que :

- Matériaux composites à fibres : Fibres allongées en suspension dans une matrice ;
- Matériaux composites particulaires : Particules en suspension dans une matrice ;
- Matériaux composites à flocons : Flocons (Rapport surface/épaisseur très faibles) en suspension dans une matrice ;
- Matériaux composites remplis : Structure creuse (matrice) remplie par un autre matériau
- Matériaux composites à couches : Ensemble de couches de matériaux différents liés ensemble par une matrice.

Dans le domaine de la voile de course et dans ce manuscrit, l'appellation matériaux composites fait en réalité référence à des matériaux composites à couches. Chaque couche, appelée pli, est elle-même un matériau composite à fibres pouvant adopter deux configurations :

- Matériaux composites à fibres continues : ensemble de fibres disposées parallèlement dans une matrice, on parle alors d'un pli UniDirectionnel (UD) ;
- Matériaux composites à fibres tissées : tissage de fibres orthogonales en suspension dans une matrice, on parle alors d'un pli croisé.

On parle alors d'un empilement de plis composites. L'orientation de chacun des plis est pilotable indépendamment lors de la définition de l'empilement. Les matériaux composites étudiés dans cette thèse sont anisotropes et plus précisément orthotropes. Ce type de structure permet l'apparition d'un couplage entre les modes de déformations du matériaux. Il est notamment possible de faire apparaître un couplage flexion-torsion (CFT) du foil, dont la magnitude dépend de l'agencement des différents plis (Weisshaar et al. 1985 ; Turnock et al. 2009). Le CFT impacte grandement l'incidence de l'écoulement vu par un foil soumis à un chargement hydrodynamique (Vanilla et al. 2021). L'influence du CFT sur les performances d'une aile a été massivement étudiée dans le

domaine aéronautique (Hayat et al. 2016 ; Stäblein 2016 ; Bagherpour et al. 2018) pour notamment concevoir des pales capables de se *décharger* lorsqu'elle rencontre une accélération de l'écoulement (Wiens et al. 2020).

Il existe également des études de l'influence du CFT des hydrofoils, tels que les travaux de (Ng et al. 2022), s'intéressant au comportement d'un foil à deux degrés de liberté (flexion et torsion) couplés. (Chae et al. 2017) a étudié l'influence de l'orientation des plis composites d'un foil sur les modes propres d'un foil, montrant l'importance de la torsion prise par le foil. (Young et al. 2017 ; Zhang et al. 2018) s'intéressent à la variation d'incidence induite par le CFT de foils composites, montrant l'impact du CFT sur le comportement d'un foil en écoulement. Finalement, (Harwood et al. 2019) propose une étude similaire pour des conditions d'écoulement plus complexes, où les foils étudiés percent la surface libre et sont sujets à la ventilation et à la cavitation.

1.5 Modélisation numérique de la réponse élastique

Une méthode commune de prédiction de la réponse élastique d'un hydrofoil est la méthode des éléments finis (Kock et al. 1991). Classiquement, les foils sont décrits avec des éléments finis solides 3D et/ou des éléments finis coques 2D (Liao et al. 2019b ; Pernod et al. 2019 ; Marimon Giovannetti et al. 2022 ; Mohammed Arab 2020). Ces modèles éléments finis sont qualifiés de haute-fidélité et sont, de la même manière que pour les modèles fluides, coûteux en temps de calcul. Les foils étant des structures allongées, il est possible de représenter leur structure à l'aide d'éléments finis poutres (1D), équivalents au modèles 3D.

Ce type de simplification a été réalisée pour des foils conçus en matériaux isotropes dans (Lothode et al. 2013). Ce problème devient cependant plus compliqué lorsque des matériaux anisotropes sont impliqués. Les travaux de (Hodges 2006) montre que le problème éléments finis 3D peut se décomposer en une série d'analyses de sections 2D et une analyse par éléments finis non-linéaire 1D. Ce protocole nécessite un outil permettant l'analyse de sections inhomogènes et anisotropes et un outil permettant l'étude d'éléments poutres avec des propriétés anisotropes.

Différents outils d'analyse de sections existent actuellement, tels que les logiciels VABS (Yu et al. 2012b), ANBA (Feil et al. 2020) ou encore BECAS (J. P. Blasques et al. 2012). Dans cette thèse, les outils implémentés dans Abaqus™ sont utilisés et un logiciel ayant pour but de remplacer Abaqus™ est développé, basé sur les travaux de (Giavotto

et al. 1983). Pour la définition d'un modèle de poutre équivalente anisotrope, des outils tels que GEBT(Yu et al. 2012a) ou beamDyn (Wang et al. 2017) existent. De la même manière que pour l'utilitaire d'analyse de sections, les outils d'Abaqus^{TM} sont utilisés et parallèlement, un logiciel d'analyse d'éléments finis de type poutre est développé, basée sur les travaux de (Mata Almonacid et al. 2007).

La modélisation de foils composites à l'aide de ses propriétés équivalentes et d'éléments finis 1D a été étudiée dans les travaux de (Temtching Temou 2020). Cependant, dans ces travaux, les valeurs du CFT sont issues de résultats expérimentaux, ce qui limite grandement le type de matériaux utilisables. Une telle approche ne permet donc pas d'optimiser la structure de foils composites. C'est pourquoi dans ces travaux de thèse, l'ensemble des propriétés équivalentes (raideurs + couplages) est déterminé à l'aide d'une analyse par éléments finis, ce qui permet de considérer des structures plus complexes et davantage de matériaux.

1.6 Interaction Fluide-Structure

L'Interaction Fluide-Structure (IFS) caractérise le couplage entre une structure et un fluide partageant une interface commune. On parle de couplage IFS car les efforts fluides tendent à déformer le foil, ce qui impacte directement l'écoulement et donc les efforts fluides. Dans le cas où le fluide peut être gazeux, il est alors question d'aéroelasticité. L'exemple le plus célèbre d'aéroelasticité est la catastrophe du pont de Tacoma en 1940, lors de laquelle la structure du pont est rentrée en résonance avec la fréquence d'excitation induite par l'écoulement (Billah 1991). Pour des fluides liquides, exclusivement considérés dans ces travaux de thèse, on parle alors d'hydroélasticité. Selon (Langre 2001), l'intensité des phénomènes IFS peut être prédite à l'aide des nombres suivants :

- Le nombre de Cauchy : ratio entre les efforts fluides d'inertie et d'une constante élastique représentative de la raideur du solide ;
- Le nombre de masse : ratio entre la densité du fluide et du solide ;
- La vitesse réduite : ratio entre la vitesse moyenne de l'écoulement et la vitesse de propagation d'une onde dans le solide

Le nombre de Cauchy, permet de qualifier l'intensité du couplage IFS (Massey 1986). En effet, une valeur faible du nombre de Cauchy signifie que la raideur de la structure est prédominante en comparaison aux efforts d'inertie du fluide, impliquant alors de faibles IFS. À l'inverse, un nombre de Cauchy élevée signifie que le couplage entre le fluide et

la structure est important, ce qui est par exemple le cas lors de l'étude d'un spinnaker (Deparday et al. 2018). Une interprétation similaire du nombre de masse et la vitesse réduite peut être faite, plus il est petit, plus la densité du solide est importante et donc les efforts associés à l'accélération du fluide son négligeable. Les méthodes de communication entre les solveurs fluides et structures sont adaptées en fonction de l'intensité du couplage IFS. Par exemple, pour des foils rigides, une approche découplée peut être retenue. Dans ce cas, un calcul fluide est réalisé pour prédire les efforts appliqués sur le foil. Ensuite, un unique calcul structure est réalisé pour s'assurer que le foil ne se déforme pas sous l'effet du fluide. À l'inverse, pour des problèmes présentant de fort couplages, il est primordial de modéliser les effets d'inertie de la structure et du fluide dans les simulations. Dans cette thèse, le couplage IFS entre l'eau et les foils est considéré suffisamment faible pour établir un couplage Quasi-Statique (QS) entre les solveurs fluides et structures. Ce faisant, on considère que le système est à l'équilibre statique à chaque itération (calcul structure + fluide). Ce type d'approche est proposée dans (Bakica et al. 2020) et appliqué à des foils dans (Lothode et al. 2013).

1.7 Optimisation

Dans cette thèse, l'objectif est de développer une boucle d'optimisation déterminant le jeu de paramètres structurels et géométriques optimisant la performance d'un foil. Plusieurs études d'optimisation de formes de foil ont été conduites. Par exemple, (Liao et al. 2022) optimise la forme d'un foil perçant la surface libre en imposant une contrainte sur l'apparition de cavitation et de décollement de la couche limite. On peut également citer (Garg et al. 2017) qui optimise la forme d'un foil de manière à minimiser sa traînée tout en intégrant des contraintes sur la portance et la contrainte maximale atteinte dans le foil. Cependant, peu d'études s'intéressent à un problème d'optimisation prenant en compte des variables géométriques et structurelles, ce qui motive les travaux de cette thèse. Un grand nombre de méthodes d'optimisation existe, certaines de ces méthodes sont déterministes (méthode du *Simplex* (Nelder et al. 1965)) ou bien stochastiques (Stratégies d'évolution (Michalewicz et al. 1996)). La méthode retenue dans cette thèse est basée sur des méta-modèles Gaussiens, ou régressions par *processus Gaussien*. Les méta-modèles Gaussiens permettent de reconstruire des fonctions sur l'ensemble de leur domaine à partir d'un nombre fini d'évaluations de celles-ci. Ces méta-modèles peuvent ensuite être exploités pour déterminer les extremums des fonctions objectifs. Cette approche permet

de limiter les évaluations réelles de la fonction objectif, pouvant être coûteuse en temps dans le cas de simulations IFS. Cette méthode d'optimisation, nommée *krigeage* (Cressie 1990) pour rendre honneur aux travaux de (Krige 1978), a été théorisée par (Matheron 1963a). Plus de détails sur la méthode d'optimisation sont donnés dans le chapitre 5 de ce manuscrit. Cette méthode a été intensivement utilisée dans le monde de la recherche. On peut citer les travaux de (Sacher et al. 2017) s'intéressant à l'optimisation des réglages d'une grand voile, les travaux de (Sacher et al. 2018b) optimisant la forme d'un hydrofoil souple ou encore les travaux de (Fasse et al. 2024) investiguant la loi de contrôle optimale d'un propulseur cycloïdale.

1.8 Contribution de la thèse

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont permis trois communications dans des conférences :

— Congrès Français de Mécanique 2022 à Nantes (Faye et al. 2022) ;
— Innov'Sail 2023 à Lorient (Faye et al. 2023b) ;
— Marine 2023 à Madrid (Faye et al. 2023a).

De plus, les deux campagnes expérimentales réalisées durant la thèse ont permis la rédaction de deux articles de revues scientifiques. Les résultats de la campagne d'essais réalisée dans le bassin de Boulogne-Sur-Mer ont été publiés dans le *Journal of Sailing Technologies* (Faye et al. 2024). Un second article relatif à la campagne expérimentale réalisée en air a également été publié dans le *Journal of Sailing Technologies* (Faye et al. 2025).

Chapitre 2

Moyens expérimentaux

Dans cette thèse, l'objectif final est d'optimiser un hydrofoil à l'aide de simulations numériques en Interaction Fluide-Structure (IFS) couplant un solveur fluide et un solveur structure. Le solveur structure permet la modélisation d'un hydrofoil à l'aide d'éléments finis de type poutres (éléments finis 1D), ce qui permet de réaliser rapidement un grand nombre de calculs. Avant d'optimiser des designs de foils à l'aide de ce modèle éléments finis, il est indispensable de vérifier sa validité pour l'étude de foils en composite. Dans ce cadre, deux campagnes expérimentales ont été réalisées au cours de cette thèse, une première en air pour valider la réponse structurelle de foils pour des cas de chargements simples et une seconde dans un bassin de courant pour valider le comportement élastique du foil dans le cas d'un chargement complexe issue d'un calcul fluide.

En parallèle des résultats expérimentaux, une validation numérique est également réalisée. Pour ce faire, un modèle éléments finis 3D haute fidélité est mis en place et les résultats qu'il permet d'obtenir sont comparés à ceux du modèle poutre. Les modèles éléments finis 3D et 1D sont respectivement présentés dans les sections 3.2 et 3.3 de ce manuscrit. Dans la section 2.1 sont présentés les foils utilisés pour les campagnes de validation expérimentales. Ensuite, les deux protocoles expérimentaux sont présentés et détaillés dans les sections 2.2 et 2.3, la modélisation numérique des foils est ensuite présentée dans le chapitre 3.

2.1 Présentation des foils expérimentaux

Pour la validation expérimentale des modèles éléments finis, 4 foils en composite (cf. figure 2.1) ont été utilisés. Les 4 foils ont été construits dans le même moule et ont donc des géométries très proches, considérées identiques pour la modélisation numérique. Ce sont des foils droits et prismatiques construits à partir d'une section NACA0015 de corde $c = 25$ cm extrudée sur une distance de 1.5 m. Leur longueur utile est cependant de 1.375 m car ces foils possèdent un talon parallélépipédique de dimension $(27 \times 12.5 \times 4)$ cm

permettant leur encastrement dans les différents montages expérimentaux. Les propriétés géométriques sont rappelées dans le tableau 2.1. Les foils sont composés d'une âme en mousse Airex, d'un pli de taffetas de verre-epoxy et d'un pli unidirectionnel (UD) de verre-epoxy. Le pli de taffetas est considéré orthotrope avec 1 et 2 étant respectivement les directions parallèles à la chaine et la trame du pli composite. Le pli d'UD est considéré isotrope transverse, avec la direction 1 parallèle aux fibres. La section du foil est illustrée dans la figure 2.2 et les propriétés mécaniques des matériaux constituant le foil sont rassemblées dans les tableaux 2.2 et 2.3. Dans ces conditions, les 4 foils ont la même masse de 1.975 kg (1 kg pour la partie utile et 0.975 kg pour le talon). Finalement, les sections des foils ont une aire de 64.2 cm^2 et une masse linéique de 0.724 kg/m.

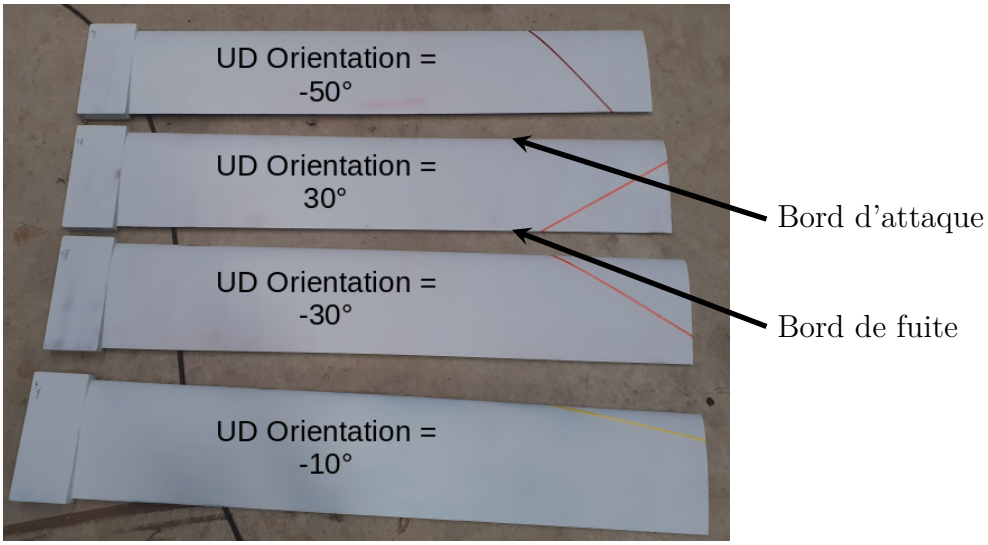


FIGURE 2.1 – Foils souples étudiés pour la campagne de validation expérimentale.

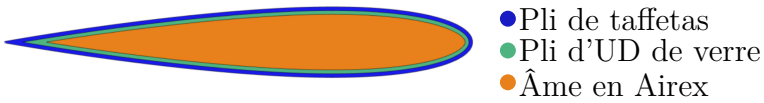


FIGURE 2.2 – Illustration de la structure de la section des foils étudiés pour la campagne de validation expérimentale.

L'unique différence entre ces foils est l'orientation de leur pli d'UD qui prend les valeurs $-50°$,$-30°$, $-10°$ et $30°$. L'orientation du pli d'UD est représentée sur chacun des foils par une marque colorée dans la figure 2.1. Les fibres du pli d'UD sont orientées de

Corde(m)	Envergure(m)	Épaisseur du pli de taffetas (mm)	Épaisseur du pli unidirectionnel (mm)
0.250	1.375	9.45E-02	3.27E-01

TABLE 2.1 – Caractéristiques géométriques de la partie utile des foils.

Material	$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	ν_{12}	$G_{12}(GPa)$	$G_{13}(GPa)$	$G_{23}(GPa)$	$\rho(kg/m^3)$
Taffetas	16.0	16.5	0.108	1.81	0.90	0.90	1625
UD	27.4	5.10	0.348	1.81	1.81	0.90	1625

TABLE 2.2 – Caractéristiques structurelles des plis composites (imprégnés de résine) composant la peau du foil.

manière à avoir un extrados symétrique à son intrados. Cette configuration est choisie pour maximiser le Couplage Flexion-Torsion (CFT) du foil (TURNOCK et al. 2009). La configuration antisymétrique aurait induit un couplage flexion-torsion plus faible mais une raideur en torsion plus importante.

Le comportement mécanique d'une structure allongée en fonction de l'orientation de ses fibres est connu (VOLOVOI et al. 2001). En conséquence, le comportement des foils peut être prédit, ces informations sont présentées dans le tableau 2.4 et sont vérifiées plus tard dans ce manuscrit.

Material	$E(MPa)$	ν	$\rho(kg/m^3)$
Airex	25.0	0.400	60

TABLE 2.3 – Caractéristiques structurelles de la mousse Airex constituant l'âme du foil.

2.2 Essais en air

2.2.1 Montage expérimental

La première campagne expérimentale réalisée dans cette thèse a pour objectif d'étudier la déformation statique de foils soumis à des charges ponctuelles. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec des simulations numériques afin de les valider. Naturellement, les modèles numériques mis en place sont aussi représentatifs que possible des expériences. C'est pourquoi le protocole expérimental est présenté en premier dans cette thèse, le chapitre 3 présente la modélisation en éléments finis des foils considérés.

Orientation du pli d'UD	Raideur attendue	Intensité du CFT
$-50°$	faible	modéré
$-30°$	modérée	élevé
$-10°$	élevée	faible
$30°$	modérée	élevé

TABLE 2.4 – Prédiction du comportement mécanique des foils étudiés.

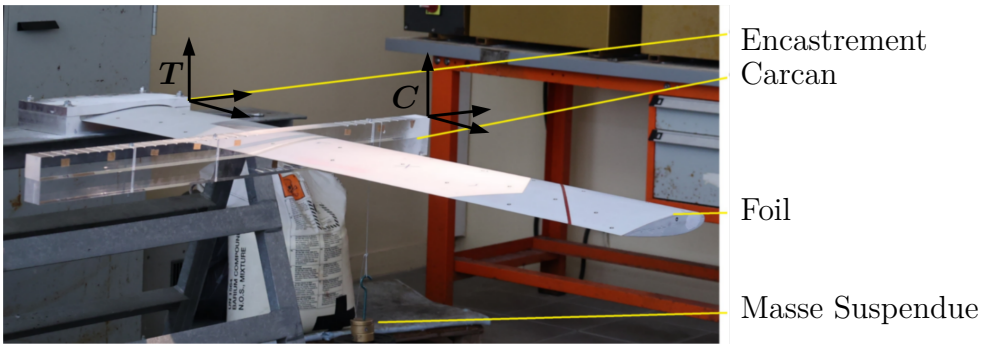


FIGURE 2.3 – Montage expérimental utilisé pour caractériser la réponse structurelle d'un foil.

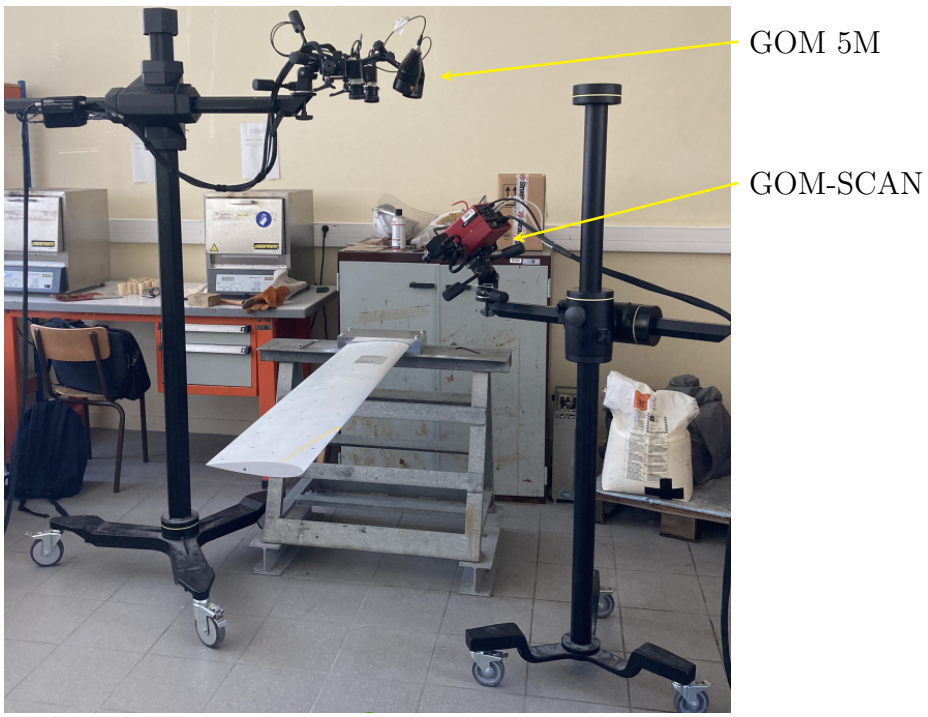


FIGURE 2.4 – Caméras permettant l'acquisition de la face supérieure d'un foil

Le montage expérimental est illustré dans la figure 2.3, où un foil est encastré et des masses y sont suspendues à différents endroits. Afin d'avoir le meilleur encastrement possible, les foils ont un talon parallélépipédique (cf. figure 2.1) qui est installé dans un système d'encastrement en aluminium. Le foil est enserré dans le système d'encastrement à l'aide de 4 vis serrées avec une clé dynamométrique, permettant de reproduire une condition d'encastrement identique pour les 4 foils. La masse ponctuelle est suspendue au foil par l'intermédiaire d'un carcan (cf. figure 2.3), ce qui permet de générer des cas de chargements avec une sollicitation en torsion significative. Ceci est pertinent car, en présence d'un CFT suffisant, un foil sollicité en torsion fléchit. Ce phénomène est exploité pour vérifier la bonne modélisation du couplage flexion-torsion dans nos modèles numériques. Le carcan, illustré dans la figure 2.5 et dont la masse est d'environ 3.54 kg, est composé de deux parties rendues solidaires avec des vis pour être ensuite *enfilé* sur le foil à une position imposée selon l'envergure. Des indentations sont présentes sur le carcan pour y suspendre facilement les masses ponctuelles.

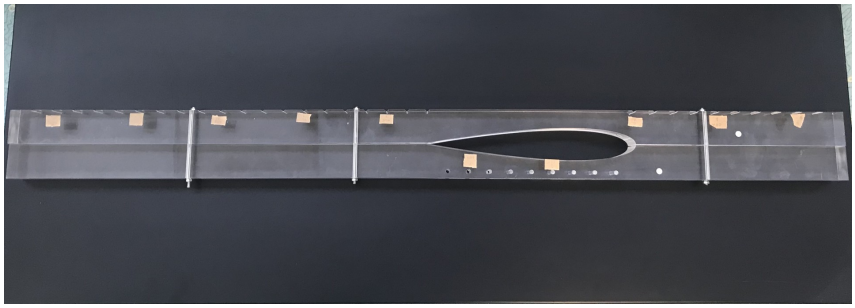


FIGURE 2.5 – Carcan utilisé pour suspendre les masses au foil.

Dans la figure 2.4, le carcan n'est pas installé sur le foil, il est donc uniquement soumis à son propre poids. De plus, la figure 2.4 présente les caméras permettant la mesure du déplacement global et local du foil. Le déplacement global de la structure est mesuré avec le GOM-SCAN (MBH 2011) alors que le déplacement local est capté avec le GOM 5M (GMBH 2018). Les détails sur les instruments de mesure sont donnés dans les sections suivantes.

2.2.2 Mesure du déplacement global du foil

Le déplacement global du foil est calculé à l'aide du GOM-SCAN. Le GOM-SCAN est un scanner mobile capable d'acquérir la forme de la face supérieure des foils. En projetant

des franges de lumière sur une surface 3D et en filmant leur déformation, le GOM-SCAN est capable de reconstruire la forme de la surface 3D. Le GOM-SCAN nécessite une calibration préliminaire aux mesures pour avoir les dimensions réelles du foil déformé. En raison de la taille du foil (envergure de 1.375 m), plusieurs acquisitions sont nécessaires pour reconstruire la face supérieure d'un foil. Le GOM-SCAN est un scanner mobile, capable en une dizaine d'acquisitions (20 pour les cas les plus complexes) de reconstruire l'intégralité de la face supérieure d'un foil. Afin que le GOM-SCAN puisse assembler les différentes acquisitions, des marqueurs sont présents sur toute la surface à acquérir. Ces marqueurs sont visibles sur les figures 2.3 et 2.4. Le coin du carcan est également capté par le GOM-SCAN (en blanc sur la figure 2.3). Son déplacement et sa rotation par rapport à l'encastrement sont mesurés pour différents cas de chargements et ensuite comparés aux résultats numériques. Les déplacements sont mesurés par rapport à une configuration de référence où le carcan est installé sur le foil mais aucune masse n'y est suspendue, le foil est donc soumis à son propre poids et à celui du carcan. Pour une position de masse suspendue imposée le long de l'envergure, le carcan (sans masse suspendue) est installé sur le foil pour réaliser une acquisition de la configuration de référence. Ensuite, la masse y est suspendue et une acquisition de la configuration déformée est réalisée. Cela permet de minimiser les incertitudes associées à l'installation du carcan.

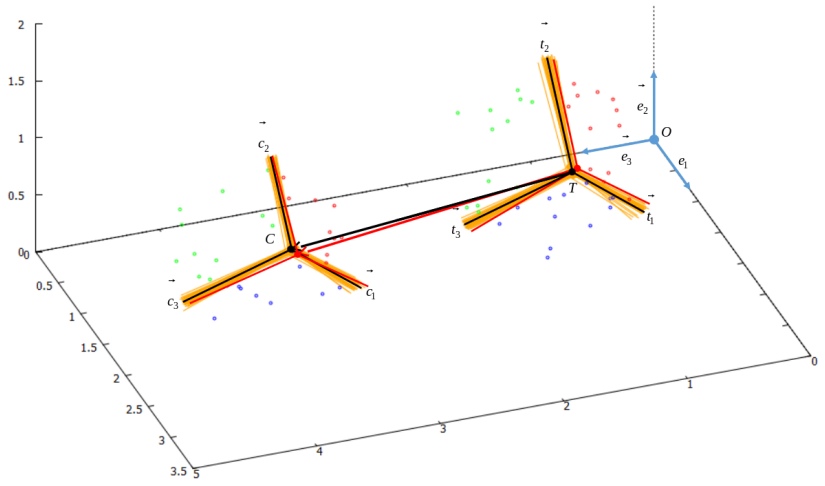


FIGURE 2.6 – Illustration de l'estimation d'incertitude sur l'acquisition du coin du carcan et de l'encastrement : $n_t = 33$, $n_p = 6$, $\epsilon_t = \epsilon_c = 33$.

Pour un cas de chargement donné, le GOM-SCAN acquiert la face supérieure du foil, le coin du carcan et le coin de l'encastrement. Le repère dans lequel sont exprimées les

différentes coordonnées est défini arbitrairement par le GOM-SCAN et il ne correspond pas à celui des modèles numériques, où les directions principales correspondent à la direction de l'envergure du foil, à la direction de la corde du foil et à la vertical terrestre. Afin d'obtenir des résultats expérimentaux dans le repère des modèles numériques, deux repères sont construits, un premier au niveau de l'encastrement et un second au niveau du coin du carcan, illustrés respectivement par $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{C}$ dans la figure 2.3. Connaissant la position et l'orientation des deux repères, il est possible de mesurer le déplacement et la rotation relatifs du coin du carcan. Cette méthode permet de s'affranchir des problèmes d'alignement entre le repère numérique et le repère construit par le GOM-SCAN. Cependant, des imperfections géométriques existent au niveau de l'encastrement et du carcan, ce qui induit des incertitudes significatives sur l'acquisition des repères et donc sur les valeurs de déplacements et rotations mesurées. La figure 2.6 illustre les incertitudes associées à l'acquisition des repères. ϵ_t et ϵ_c sont les amplitudes des bruits Gaussiens utilisés pour simuler un grand nombre d'acquisitions des repères (évalués pour un cas de chargement). La demi-amplitude du bruit Gaussien représente le rapport entre la précision de la mesure et une longueur caractéristique de la surface où la mesure est réalisée (environ 20 cm pour ce montage expérimental), dépendante de la fenêtre d'acquisition du GOM-SCAN. Pour évaluer les incertitudes, deux repères analytiques sont définis, associés aux deux coins de référence. Les deux repères sont caractérisés par une origine et une orientation. Le coin de l'encastrement et du carcan sont respectivement modélisés par ($\boldsymbol{T^{theo}}$,$\boldsymbol{t_i^{theo}}$) et ($\boldsymbol{C^{theo}}$,$\boldsymbol{c_i^{theo}}$) où i représente les trois directions de l'espace ($i = 1, 2, 3$). Sur chacun des trois plans des repères, un nombre n_p de points est généré avec une composante hors-plan non nulle, défini par le bruit Gaussien. Par exemple, comme le coin du carcan est plus parallélépipédique que celui de l'encastrement, il est plus facile d'y construire un repère et en conséquence, le bruit Gaussien utilisé pour générer des points au niveau du carcan est plus faible que celui utilisé au niveau de l'encastrement. Les amplitudes des bruits Gaussien au niveau des deux coins sont présentées plus tard dans ce chapitre.

Les bruits Gaussiens retenus pour la génération de points bruités au niveau de l'encastrement et du carcan sont respectivement notés ϵ_c et ϵ_t. Après avoir généré les points bruités, il y a, pour chacun des coins, $3n_p$ points qui, à l'aide de la méthode des moindres carrés, permettent de définir un repère. Connaissant le repère théorique utilisé pour générer les points bruités, il est possible de calculer une différence d'origine et d'orientation pour les repères bruités. L'erreur moyenne sur une mesure peut alors être estimée en répétant ce protocole un grand nombre de fois ; noté n_t. Dans la figure 2.6, où les repères

théoriques sont représentés en noir, 33 repères sont générés et les points bruités (en vert, bleu et rouge) sont représentés pour la première et dernière itération. Les repères générés sont illustrés en orange dans la figure 2.6 et le repère à une itération donné k est représenté en rouge. Pour chaque itération k et chaque direction de l'espace i, l'incertitude sur la position δx_i^k et la rotation δr_i^k relative du point $\boldsymbol{C^k}$ par rapport au point $\boldsymbol{T^k}$ (cf. figure 2.6) est estimée. Les expressions des incertitudes sont données dans les équations ci-dessous.

$$\frac{\delta x_i^k}{L_{ref}} = -\frac{\boldsymbol{T^k C^k} \cdot \boldsymbol{t_i^k} - \boldsymbol{T^{theo} C^{theo}} \cdot \boldsymbol{t_i^{theo}}}{\|\boldsymbol{T^{theo} C^{theo}}\|} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\delta r_1^k = \frac{90}{\pi} \Big(&\arccos\Big(\Big(\boldsymbol{c_2^k} - \Big(\boldsymbol{c_2^k} \cdot \boldsymbol{c_1^k}\Big)\boldsymbol{c_1^k}\Big)\boldsymbol{t_2^k}\Big) + \arccos\Big(\Big(\boldsymbol{c_3^k} - \Big(\boldsymbol{c_3^k} \cdot \boldsymbol{c_1^k}\Big)\boldsymbol{c_1^k}\Big)\boldsymbol{t_3^k}\Big) \\ &- \arccos\Big(\Big(\boldsymbol{c_2^{theo}} - \Big(\boldsymbol{c_2^{theo}} \cdot \boldsymbol{c_1^{theo}}\Big)\boldsymbol{c_1^{theo}}\Big)\boldsymbol{t_2^{theo}}\Big) - \arccos\Big(\Big(\boldsymbol{c_3^{theo}} - \Big(\boldsymbol{c_3^{theo}} \cdot \boldsymbol{c_1^{theo}}\Big)\boldsymbol{c_1^{theo}}\Big)\boldsymbol{t_3^{theo}}\Big)\Big)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Les expressions de δr_2^k et δr_3^k s'obtiennent en réalisant une permutation circulaire de l'équation (2.2). Après les n_t itérations, les incertitudes moyennes pour chacune des composantes de déplacement et de rotation s'expriment tel que :

$$\left.\frac{\delta x_i}{L_{ref}}\right|_{\text{mean}} = \frac{\text{mean}\left(\delta x_i^k\right)}{L_{ref}} \quad ; \quad \left.\frac{\delta x_i}{L_{ref}}\right|_{\text{std}} = \frac{\text{std}\left(\delta x_i^k\right)}{L_{ref}} \tag{2.3}$$

$$\delta r_i|_{\text{mean}} = \text{mean}\left(\delta r_i^k\right) \quad ; \quad \delta r_i|_{\text{std}} = \text{std}\left(\delta r_i^k\right) \tag{2.4}$$

Ensuite, l'expression de l'incertitude relative sur le déplacement s'écrit :

$$\frac{\delta x}{L_{ref}} = \max\left(\left.\frac{\delta x_i}{L_{ref}}\right|_{\text{mean}} \pm 2 \left.\frac{\delta x_i}{L_{ref}}\right|_{\text{std}}\right) \tag{2.5}$$

$$\delta r = \max\left(\delta r_i|_{\text{mean}} \pm 2\, \delta r_i|_{\text{std}}\right) \tag{2.6}$$

Pendant le post-traitement des résultats expérimentaux, les points appartenant à chacune des faces des deux coins sont sélectionnés à la main. Le nombre optimal de points par face est déterminé comme un compromis entre le temps de post-traitement et la précision de la mesure, la valeur retenue est $n_p = 6$. Cette méthode constitue la principale source d'incertitudes dans cette campagne expérimentale. Comme expliqué précédemment, le

bruit Gaussien est défini comme le rapport entre la précision de la mesure et une longueur caractéristique de la surface scannée. Pour mesurer le déplacement d'un foil, deux acquisitions de sa forme sont réalisées. Pour la première, le foil est dans sa configuration de référence (carcan installé sans masse suspendue) et pour la seconde, une masse est suspendue au carcan. L'acquisition de la surface de référence est réalisée une seule fois pour chaque foil et chaque position du carcan considéré.

Pour le calcul du bruit Gaussien ϵ_c (associé au carcan), la longueur de référence retenue est de 5 cm (épaisseur du carcan) et la précision de la mesure est d'environ 0.01 mm. Pour l'encastrement, le bruit ϵ_t est déterminée en considérant une longueur de référence de 20 cm (fenêtre d'acquisition du GOM-SCAN) et une précision de 0.2 mm. Les valeurs des bruits Gaussien obtenues sont données dans le tableau 2.5. L'acquisition du coin de l'encastrement est moins précise en raison d'une planéité moins bonne, elle même due à l'usinage du système d'encastrement. Dans le tableau 2.5 sont également fournies les incertitudes estimées pour la mesure du déplacement (et de la rotation) d'un foil avec le GOM-SCAN.

ϵ_c	ϵ_t	$\delta x/L_{ref}$	$\delta r(^\circ)$
2.00E-4	1.00E-03	2.01E-03	1.68E-01

TABLE 2.5 – Estimation de l'incertitude sur la mesure du déplacement d'un foil réalisée avec le GOM-SCAN.

Les surfaces des foils sont scannées deux fois pour obtenir une valeur de déplacement et de rotation. Cela signifie que les incertitudes sont en réalité le double des valeurs présentées dans le tableau 2.5. Dans le cas présent, l'incertitude absolue sur la rotation est de 0.336° et l'incertitude relative sur le déplacement est de $4.02E-3$.

2.2.3 Mesure du déplacement local du foil

Dans cette section, le GOM 5M, utilisé pour la mesure de champ de déplacements locaux sur des petites surfaces, est présenté. Dans cette campagne expérimentale, la surface scannée par le GOM 5M est un rectangle de dimension $100 * 120mm$ située près de l'encastrement sur la face supérieure des foils.

La surface scannée par le GOM 5M est définie entre $Z = 0.25$ m et $Z = 0.35$ où Z représente la distance d'un point à l'encastrement selon la direction de l'envergure. Dans cette zone, les déplacements mesurés sont maximisés tout en évitant des problèmes

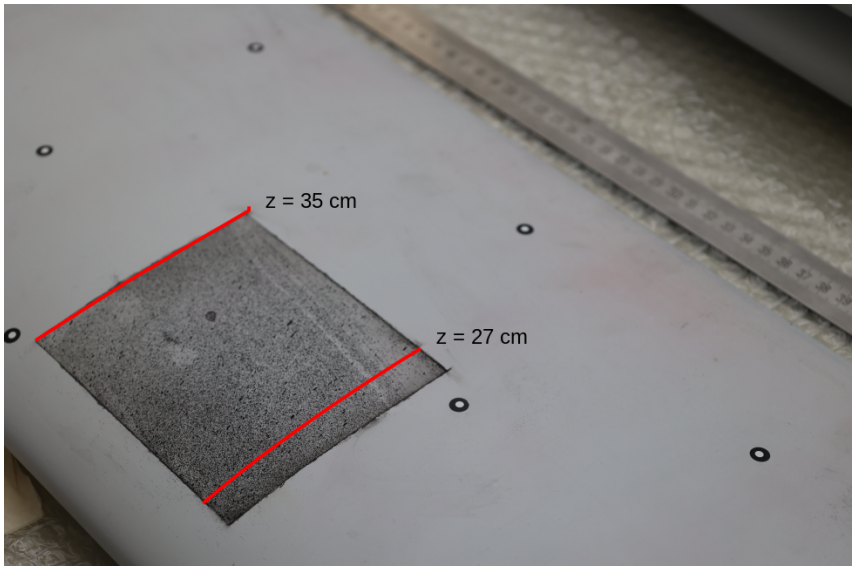


FIGURE 2.7 – Mouchetis utilisé par le GOM 5M pour mesurer un champ de déformation local.

d'acquisitions dus à la proximité de l'encastrement. Sur la surface scannée, un mouchetis (cf. figure 2.7) est généré, qui servira de marqueur pour le GOM 5M. Ensuite, à l'aide d'un algorithme de corrélation d'image (DIC, voir (JORGE et al. 2022)), le GOM 5M mesure un champ de déplacement à partir de deux acquisitions du mouchetis, réalisées dans une configuration de référence et une configuration déformée. Comme dans la section précédente, la configuration de référence est celle où le carcan est installé sur le foil mais aucune masse n'y est suspendue.

Pour caractériser la déformation locale du foil près de l'encastrement, un déplacement relatif est mesuré comme la différence de déplacement selon l'envergure entre les extrémités du mouchetis (lignes rouges sur la figure 2.7). Afin de réduire les incertitudes, le champ de déplacement mesuré sur le mouchetis est obtenu en moyennant 6 acquisitions. Après la mesure, le GOM 5M fournit un nuage de points avec des valeurs de déplacements selon l'envergure du foil. Le déplacement d'un point est calculé à partir d'une corrélation d'image réalisée sur un rectangle de $11 * 19$ pixels, communément appelé zone d'intérêt. En conséquence, les valeurs de déplacements sont moyennées dans la zone d'intérêt et l'incertitude est déduite à partir de l'écart type du déplacement dans la zone d'intérêt.

2.3 Essais en bassin

La seconde campagne expérimentale réalisée au cours de cette thèse a pour objectif d'étudier le comportement élastique d'un foil soumis à des efforts fluides. Pour ce faire, le foil avec une orientation d'UD de $-30°$ a été étudié dans le bassin de courant de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer. Il aurait été intéressant d'étudier la totalité des foils, notamment pour voir l'impact du changement de signe de l'orientation d'UD sur le comportement du foil en écoulement. Dans le temps imparti pour utiliser les moyens expérimentaux, seule l'étude d'un foil a été possible. Pour chacune des configurations testées dans le bassin (immersion, vitesse, angle d'attaque), les efforts hydrodynamiques et la déformation du foil sont mesurés.

Le bassin de courant de l'Ifremer est illustré dans la figure 2.8. La zone d'étude fait 18 m de long, 4 m de large et 2 m de profondeur. Dans ce bassin sont générés des courants, considérés uniformes (Gaurier et al. 2010), avec des vitesses allant de 0.1 m/s à 2.2 m/s. Le foil est étudié pour deux vitesses U, 0.8 m/s et 1.2 m/s. Les nombres de Froude associés à ces vitesses (calculés avec la corde du foil) sont respectivement 0.51 et 0.77. Pour les vitesses retenues, l'intensité turbulente de l'écoulement est considérée constante avec une valeur de 1.5%.

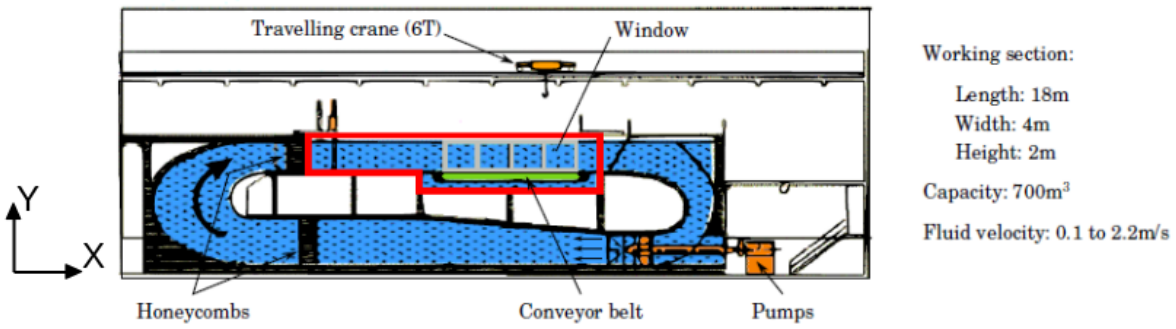


Figure 2.8 – Schéma du bassin à courant de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer (adaptée de (Marty et al. 2021)).

Le foil est encastré dans un hexapode à 6 degrés de liberté permettant de modifier l'immersion h et l'angle d'attaque α du foil. La figure 2.9 illustre le dispositif expérimental. Les efforts hydrodynamiques appliqués sur le foil sont mesurés à l'aide d'une balance fixée à l'hexapode au niveau de l'encastrement du foil. Cette balance mesure les trois composantes des forces et moments orthogonaux, avec une précision respective de 150

daN et 100 daN.m. La précision de la balance est d'environ 1.5 N pour les forces et 1 N.m pour les moments. Afin de mesurer uniquement les efforts agissant sur le foil, une série de mesures d'efforts est réalisée sans placer le foil dans le système d'encastrement. Cela permet ensuite de soustraire ces valeurs d'efforts aux mesures avec foil pour obtenir les efforts appliqués sur le foil. Avec ce protocole, l'interaction entre le foil et le bras de l'hexapode est négligée. En conséquence, le système d'encastrement n'est pas représenté dans nos modèles numériques.

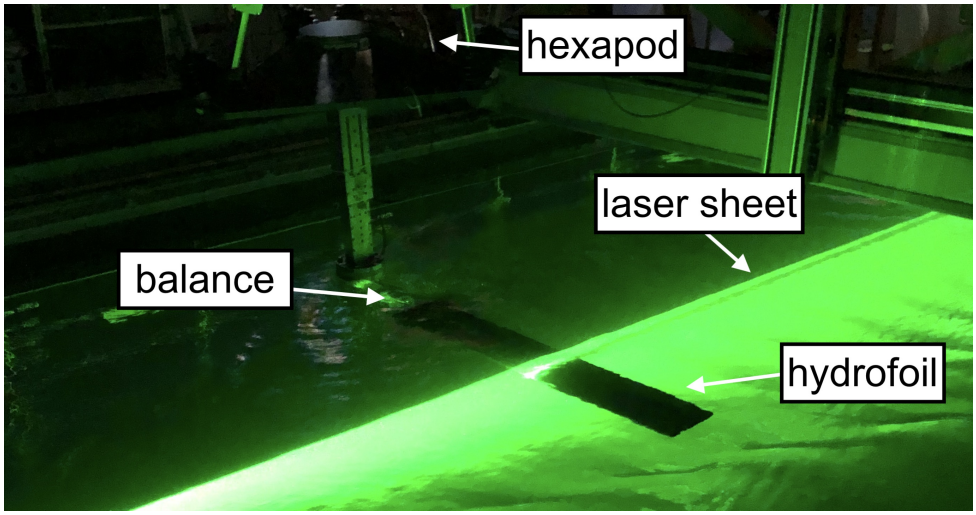


FIGURE 2.9 – Nappe laser projetée sur le foil encastré à l'hexapode, vue depuis le haut du bassin de courant (adaptée de (FAYE et al. 2024)).

L'orientation de 30° du pli d'UD du foil induit un couplage flexion-torsion qui rend le foil instable. Cela signifie que lorsque le foil est fléchi sous l'effet des efforts hydrodynamiques, la torsion induite par sa flexion du foil tend à augmenter son angle d'attaque. En conséquence, les efforts hydrodynamiques s'appliquant sur lui augmentent à leur tour. En pratique, ce genre de phénomène est à éviter car il peut accélérer l'apparition du décrochage (YOUNG et al. 2017). Dans le cadre de cette campagne expérimentale, c'est un avantage car cela facilite l'apparition de déformations significatives, plus simples à mesurer.

La figure 2.9 montre la nappe laser projetée sur le foil, permettant de mesurer sa déformation. La position de la nappe laser selon l'envergure est fixée à 18.5 cm de l'extrémité du foil, où les déformations sont maximales. En plaçant une caméra rapide au niveau de la fenêtre du bassin (représentée en rouge dans la figure 2.8), il est possible de capturer la projection du laser sur l'extrados ou l'intrados du foil, cela dépend de l'immersion et

de l'angle d'attaque imposés. Deux exemples de ce que le caméra capture sont illustrés dans la figure 2.10. Pour certaines configuration à faible immersion, des acquisitions de la surface libre sont possibles, l'impact de la surface libre sur les efforts hydrodynamiques est brièvement abordé dans la section 4.2.2

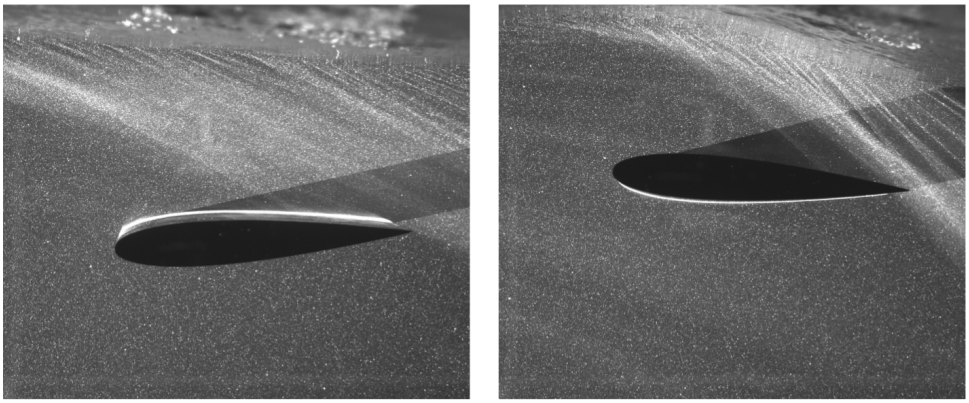


FIGURE 2.10 – Nappe laser projetée sur le foil vue depuis le coté du bassin de courant – $h/c = 0.5$, $U = 1.2$ m/s, $\alpha = -3°$(gauche)/ $\alpha = +3°$(droite).

À l'aide des images de la caméra, il est possible de calculer la déformation du foil en capturant la projection de la nappe laser avant et après déformation. Ensuite, à l'aide d'un algorithme de détection de bords et de la méthode des moindres carrés, il est possible d'identifier la nappe laser sur les deux images, puis d'en déduire une rotation et une translation. En faisant ça, une hypothèse sur le mouvement rigide des sections du foil est réalisée. La méthode est illustrée dans la figure 2.11. Avec ce protocole, les déplacements sont mesurés par rapport à une configuration de référence où le foil est immergé sans courant et donc soumis uniquement à son poids et à la poussée d'Archimède. La poussée d'Archimède appliquée sur la partie utile du foil représente un effort d'environ 87 N pour un poids de 9.8 N. Ce qui signifie que la flottabilité de la partie du foil est positive et que celui-ci est donc fléchi vers le haut dans sa configuration de référence. En raison de la présence d'un CFT, cette flèche initiale induit également une torsion augmentant l'angle d'attaque du foil.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre 2 sont présentés les moyens expérimentaux utilisés pour valider les modèles numériques développés dans cette thèse. Deux campagnes ont été réalisées durant

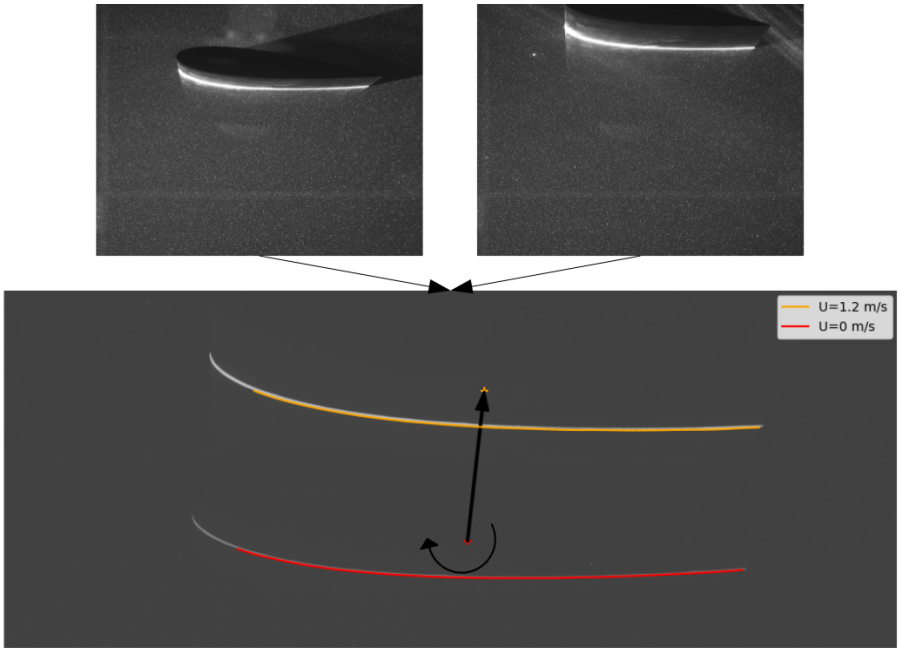


FIGURE 2.11 – Illustration de la méthode de détection de bord permettant la mesure des déformations du foil.

cette thèse. Pour les premiers essais expérimentaux, des foils de géométries considérées identiques sont étudiés. Ils sont caractérisés par des propriétés structurelles différentes, pilotées par l'orientation du pli d'UD de verre composant leurs peaux. Les déformations des foils sont mesurées pour des chargements ponctuels, appliqués en suspendant une masse à un carcan enserrant les foils. Cette campagne expérimentale a pour objectif de valider la modélisation numérique du comportement élastique de foils en composite, les résultats associés sont présentés dans la section 4.1.

La seconde campagne expérimentale, réalisée dans le bassin de courant de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer, a pour objectif de valider la modélisation des IFS de foils composites en écoulement. Lors de ces essais, seul un des foils est étudié, l'orientation de son pli d'UD est choisie de manière à ce qu'il soit instable. Ce qui signifie que son angle d'attaque augmente lorsqu'il est déformé par l'écoulement. Cela permet de mesurer des déformations significatives, plus facile à comparer aux modèles numériques. Les résultats associés à cette seconde campagne sont détaillés dans la section 4.2.

Le prochain chapitre 3 porte sur la méthode de modélisation numérique des foils, en partant de notions générales sur la méthode des éléments finis jusqu'à la mise en place

des calculs pour les foils présentés dans la section 2.1.

Chapitre 3

Modélisation d'un hydrofoil souple

Le second chapitre présente deux méthodes permettant la modélisation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure (IFS) d'un foil souple. Pour les deux modèles, une approche partitionnée est retenue, dans laquelle l'écoulement et la réponse structurelle du foil sont résolus séparément.

La réponse structurelle du foil est approchée numériquement grâce à la méthode des éléments finis (MEF) dont la théorie est rappelée dans la section 3.1. Ensuite, les sections 3.2 et 3.3 présentent deux modèles éléments finis (mis en place dans le logiciel *Abaqus*™), caractérisés par des niveaux de fidélité différents. Le modèle de plus basse fidélité est un modèle de poutre équivalente, qui est ensuite comparé au modèle de plus haute fidélité (éléments finis 2D/3D). Pour finir ce chapitre, la section 3.4 présente la modélisation de l'écoulement fluide avec le logiciel *PUFFIn* ainsi que le couplage IFS mis en place entre *PUFFIn* et *Abaqus*™.

3.1 Généralités sur les éléments finis

Les progrès informatiques survenus ces dernières années ont grandement accéléré la démocratisation des méthodes numériques dans le monde de l'ingénierie. Aujourd'hui, la MEF est un outil couramment utilisé pour le dimensionnement de structures. Durant cette thèse, les calculs éléments finis sont réalisés avec le logiciel commercial *Abaqus*™. La MEF consiste à décomposer des milieux continus complexes en éléments finis simples, dont le comportement se décrit à l'aide de fonctions d'interpolation. La réponse de la structure est alors approximée dans chaque élément fini, en tenant compte des conditions de continuités entre éléments voisins, des conditions limites ou encore des contacts entre différents matériaux. Dans cette thèse, les calculs IFS réalisés sont quasi-statiques donc les modèles numériques mis en place ne prennent pas en compte les effets inertiels. Cependant,

les matrices de masse des éléments finis sont quand même développées afin de présenter une méthode d'analyse de modes propres.

3.1.1 Cinématique et mesures de déformation

Pour commencer la présentation de la MEF, il est pertinent de rappeler les concepts cinématiques impliqués dans la description de la déformation d'un solide continu. Le point de vue Lagrangien est adopté ici, ce qui est classique en mécanique des solides déformables. La MEF est décrite ici dans le cadre des grandes déformations, ce qui implique l'apparition de non-linéarités géométriques. Les déformations considérées sont grandes mais ne doivent pas nous placer hors de la limite élastique des matériaux, ce qui ne correspond pas aux configurations envisagées dans le cadre de cette thèse.

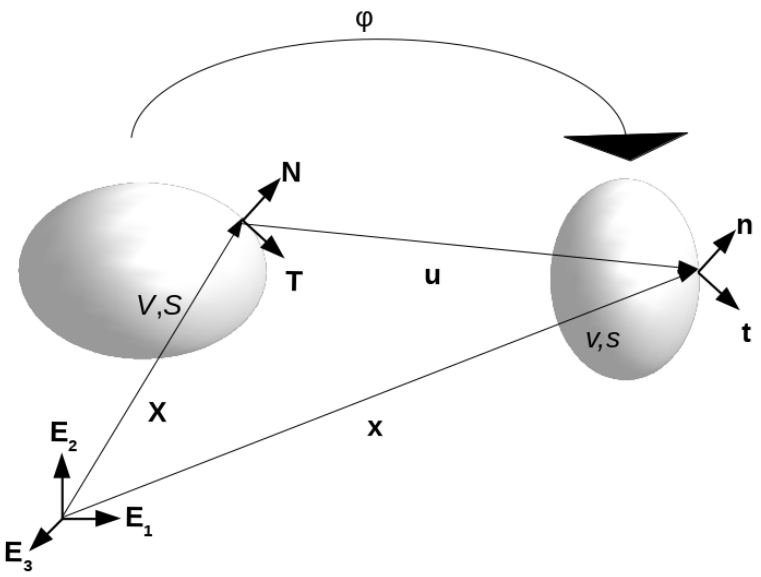


FIGURE 3.1 – Description du mouvement d'un solide déformable.

La figure 3.1 illustre un solide déformable dans son état initial et déformé. Dans ce chapitre, les symboles en majuscules sont associés à la configuration non-déformée du solide alors que les symboles minuscules représentent l'état courant du corps déformable. La base $E = (\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3})$ est utilisée pour décrire le solide dans sa configuration initiale et déformée. Pour la suite des développements, la base E est définie comme orthonormée.

Dans la figure 3.1, les vecteurs $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ et $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ représentent respectivement la position initiale et déformée d'un point du solide exprimées dans E. Les

vecteurs $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3)^T$, $\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, T_3)^T$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ et $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ illustrent, pour la configuration initiale et courante, le vecteur normal et le vecteur contrainte en un point du solide.

Pour décrire l'état de déformation du solide dans sa configuration courante, le tenseur du gradient de transformation est défini en dérivant la position $\boldsymbol{x}$ d'un point par rapport à sa position initiale $\boldsymbol{X}$. Le vecteur déplacement $\boldsymbol{u}$ représente le déplacement d'un point du solide tel que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$. Le mouvement des points du solide peut être décrit par une fonction vectorielle temporelle et spatiale φ définie telle que :

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X}, t) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{X}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial X_i} \otimes \boldsymbol{E_i} \tag{3.2}$$

L'inverse du gradient de transformation est défini par $\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}$. Il est intéressant de noter que le gradient de transformation $\boldsymbol{F}$ agit comme une matrice Jacobienne permettant le passage de la base E vers la base locale dans l'état déformé, notée e et définie par $e = E\boldsymbol{F}$. L'expression du gradient de transformation (cf. équation (3.2)) permet d'établir les relations entre les composantes des bases E et e, ce qui est détaillée dans l'Annexe 1. Soient dV, $d\boldsymbol{S}$, dv et $d\boldsymbol{s}$ un volume infinitésimale et un vecteur surface élémentaire du solide, respectivement associés aux configurations initiale et déformée. Les relations à retenir sont données dans l'équation ci-dessous :

$$dv = \underbrace{det(\boldsymbol{F})}_{J} dV; \quad J\boldsymbol{F}^{-T} d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{s} \tag{3.3}$$

Plusieurs mesures permettent de quantifier l'état de déformation d'un solide, les plus courantes sont rappelées ci-dessous :

— Tenseur de déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$, exprimé à partir des dérivées spatiales du déplacements par rapport à la configuration de référence du solide.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{X}} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{X}}^T) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T) - \boldsymbol{I_3}; \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}) \tag{3.4}$$

Où $\boldsymbol{I_3}$ est la matrice identité de dimensions $(3 * 3)$

— Tenseur de déformations de Cauchy-Green droit $\boldsymbol{C}$, couramment appelé tenseur de déformations de Cauchy.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \tag{3.5}$$

$\boldsymbol{C}$ quantifie les déformations comme le carré des changements locaux de distances dans le solide.

— Tenseur de déformations de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I_3}) \tag{3.6}$$

Classiquement, le tenseur de déformation de Green-Lagrange est utilisé pour l'approche Lagrangienne, adoptée dans ce manuscrit.

3.1.2 Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels (PTV) représente la forme faible de l'équilibre des efforts intérieurs au solide. Le développement de ce dernier, détaillé dans l'Annexe 2, se résume en deux équations, une pour l'équilibre des forces et une seconde pour l'équilibre des moments.

$$div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{f} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \textbf{avec} \quad div(\boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \tag{3.8}$$

Classiquement, le PTV est *érigé* en principe et la formulation forte associée (cf. équations (3.7) et (3.8)) en découle. Cependant, dans la suite du manuscrit, la démarche inverse est adoptée car jugée plus didactique. Pour ce faire, les 3 équations d'équilibre translationnel de l'équation (3.7) sont multipliées à une fonction vectorielle arbitrairement choisie, suffisamment régulière sur l'ensemble du volume du corps. Pour établir le PTV, cette fonction est choisie comme étant un champ de déplacement virtuel noté $\delta\boldsymbol{u}$, considéré uniforme pour la suite des développements.

L'expression du travail virtuel $\delta\mathcal{W}$ des forces appliquées sur le corps (efforts inertiels, force de volume et de surface) est développée à partir du champ de déplacement virtuel $\delta\boldsymbol{u}$. Pour ce faire, chaque terme de l'équation (3.7) est multiplié au champ de déplacement

virtuel $\delta\boldsymbol{u}$. La relation ainsi obtenue est ensuite intégrée sur l'ensemble du volume du corps. Le développement du PTV est détaillé dans l'Annexe 3, son expression final est donnée par :

$$\delta\mathcal{W} = \underbrace{\int_s \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}ds + \int_v \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}dv}_{\delta\mathcal{W}_{ext}} - \underbrace{\int_v \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1})dv}_{\delta\mathcal{W}_{int}} - \underbrace{\int_v \delta\boldsymbol{u}\cdot\rho\dot{\boldsymbol{v}}dv}_{\delta\mathcal{W}_{cin}} = 0 \tag{3.9}$$

L'équation (3.9) montre que travail virtuel se décompose en trois contributions, une première associée aux forces agissant sur le solide ($\delta\mathcal{W}_{ext}$), une seconde associée aux effets inertiels ($\delta\mathcal{W}_{cin}$) et une dernière associée aux efforts internes à la structure ($\delta\mathcal{W}_{int}$).

3.1.3 Mesures de contraintes

Dans le PTV, le travail virtuel des efforts internes $\delta\mathcal{W}^{int}$ est fonction du tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur de déformation virtuel $\delta\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}$. Ce tenseur de contraintes est dit *conjugué* à ce tenseur de déformations.

L'expression de $\delta\mathcal{W}^{int}$ est donnée dans la configuration déformée du solide. Il est pertinent de définir un couple de mesure de déformations et de contraintes conjuguées dans la configuration de référence du solide. Pour ce faire, le PTV peut être réécrit en changeant le volume et la surface d'intégration, ce qui est détaillé dans l'Annexe 4. Dans cette Annexe sont introduites les mesures de contraintes suivantes :

— Tenseur de contraintes de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$;
— Premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$;
— Second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$.

Les tenseurs de contraintes de Piola-Kirchhoff *transportent* les contraintes de Cauchy dans la configuration de référence du solide, ce qui est intéressant pour une mesure de contraintes dans le cadre d'un problème où un solide est soumis à d'importantes déformations.

3.1.4 Opérateur de Hooke

La loi de Hooke définit la relation entre le tenseur de déformations infinitésimales et le tenseur de contraintes de Cauchy tel que :

$$\sigma_{ij} = C^t_{ijkl}\epsilon_{ij} \quad \equiv \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^t\boldsymbol{\epsilon} \tag{3.10}$$

Le premier principe de la thermodynamique combiné avec la symétrie des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ implique des symétries pour $\boldsymbol{C^t}$ telles que :

$$C^t_{ijkl} = C^t_{jikl} = C^t_{ijlk} = C^t_{klij} \tag{3.11}$$

Cela réduit le nombre de termes de $\boldsymbol{C^t}$ de 81 à 21, ce qui permet de définir la matrice de raideur $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ de dimension (6*6) permettant de relier les expressions contractées des matrices de raideur et de déformation. Soient $\boldsymbol{\sigma_{vc}}$ et $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}$ des vecteurs construit à partir de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ en suivant la notation de Voight.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_6/2 & \epsilon_5/2 \\ \epsilon_6/2 & \epsilon_2 & \epsilon_4/2 \\ \epsilon_5/2 & \epsilon_4/2 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon_{vd}} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6)^T \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma_{vc}} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T \tag{3.13}$$

La notation de Voight permet dans certains cas de faire disparaitre le double produit tensoriel de deux matrices. Par exemple, le double produit vectoriel $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}$ se réécrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^T \boldsymbol{\sigma_{vc}} \tag{3.14}$$

La notation de Voight peut être adoptée pour tous les tenseurs de déformations et de contraintes à condition qu'ils soient symétriques. La notation de Voight permet alors de réécrire la loi de Hooke telle que :

$$\boldsymbol{\sigma_{vc}} = \boldsymbol{\mathcal{C}} \boldsymbol{\epsilon_{vd}} \tag{3.15}$$

Pour un matériau orthotrope, la matrice constitutive du matériau $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est construite à partir des propriétés mécaniques suivantes.

— E_1, E_2, E_3 : modules élastiques dans les trois directions de l'espace ;
— G_{12}, G_{13}, G_{23} : modules de cisaillement dans les trois directions de l'espace ;
— ν_{12}, ν_{13}, ν_{23} : coefficients de Poisson dans les trois directions de l'espace ;

À partir de ces quantités, la matrice de raideur constitutive $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{pmatrix}^{-1} \tag{3.16}$$

Où,

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}; \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}; \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \tag{3.17}$$

Dans la limite des matériaux élastiques subissant de faibles déformations, la matrice constitutive $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ relie chaque mesure conjuguée de déformations et de contraintes. Par exemple, le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff et le tenseur de déformations de Green-Lagrange, réorganisés sous forme vectoriel en suivant la notation de Voight, sont reliés par l'expression :

$$\boldsymbol{S_{vc}} = \boldsymbol{\mathcal{C}} \boldsymbol{E_{vd}} \tag{3.18}$$

3.1.5 Discrétisation des quantités cinématiques

Dans cette section, les expressions discrétisées des champs continus impliqués dans le PTV sont établies et la notion d'élément fini est introduite, ce qui permet ensuite de réécrire le PTV et de faire apparaître les équations d'équilibre du solide.

Soit une structure discrétisée en N_{el} éléments finis possédant chacun N_n nœuds (un nœud peut appartenir à plusieurs éléments). La position d'un point de la structure dans un élément fini est exprimée comme une interpolation de la position des nœuds de l'élément. Cette interpolation est réalisée à l'aide de fonctions d'interpolation N_a, également appelées fonctions de forme. Pour un élément fini possédant N_n nœuds, la position d'un point dans la configuration initiale et déformée s'écrit :

$$\boldsymbol{X} = \sum_{a=1}^{N_n} N_a \boldsymbol{X}_a; \quad \boldsymbol{x} = \sum_{a=1}^{N_n} N_a \boldsymbol{x}_a \tag{3.19}$$

Dans l'équation (3.19), la somme est réalisée pour tout les nœuds de l'élément. $\boldsymbol{X}_a =$

$(X_{a1}, X_{a2}, X_{a3})^T$ et $\boldsymbol{x}_a = (x_{a1}, x_{a2}, x_{a3})^T$ représentent respectivement la position d'un nœud a de l'élément dans sa configuration initiale et déformée. La fonction de forme pour un nœud de l'élément est noté N_a, son développement n'est pas détaillé ici car les fonctions de forme sont propres à l'élément considéré. Ces fonctions sont présentées plus tard dans le manuscrit, lors de la présentation des éléments finis retenus pour la modélisation des foils.

Classiquement, pour un type d'élément fini donné, ses fonctions de forme sont données dans son repère réduit, ce qui permet d'obtenir une expression indépendante de la forme réelle de l'élément.

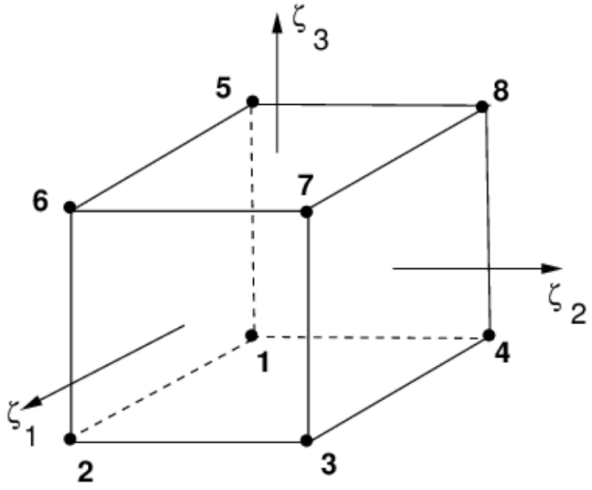


FIGURE 3.2 – Élément fini 3D hexaédrique dans son repère isoparamétrique.

La figure 3.2 illustre un élément fini hexaédrique dans son repère réduit (dans lequel il est forcément un cube). Ce repère est noté $\zeta = (\boldsymbol{\zeta_1}, \boldsymbol{\zeta_2}, \boldsymbol{\zeta_3})$ et est relié à la base de référence E par une matrice Jacobienne $\boldsymbol{J^{el}}$ définie dans l'équation (3.19). La position d'un point matériel exprimée dans son repère réduit est notée $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$

$$\boldsymbol{J^{el}} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial X_1}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \zeta_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial X_3}{\partial \zeta_3} \end{pmatrix}; \quad J^{el}_{ij} = \sum_{a=1}^{N_n} X_{ai} \frac{\partial N_a}{\partial \zeta_j} \tag{3.20}$$

Pour la suite de la présentation de la MEF, une notation matricielle est adoptée. La matrice $\boldsymbol{N}^f$ est alors définie pour un élément comme une matrice contenant l'ensemble des fonctions de forme N_a. L'équation (3.19) devient alors :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}^f \boldsymbol{X}^{el}; \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}^f \boldsymbol{x}^{el} \tag{3.21}$$

Dans l'équation ci-dessus, $\boldsymbol{X}^{el}$ et $\boldsymbol{x}^{el}$ sont des vecteurs regroupant les positions des nœuds de l'élément fini dans sa configuration initiale et déformée. Par exemple, l'expression détaillée de $\boldsymbol{X}^{el}$ donne :

$$\boldsymbol{X}^{el} = (\boldsymbol{X}_1{}^T, \boldsymbol{X}_2{}^T, ..., \boldsymbol{X}_{N_n}{}^T)^T; \quad \boldsymbol{X}_a = (X_{a_1}, X_{a_2}, X_{a_3})^T; \quad a = 1, 2, ..., N_n \tag{3.22}$$

La taille de ce vecteur est fonction du nombre de dimensions considérées et du nombre de nœuds. Par exemple, pour l'élément illustré dans la figure 3.2 en 3D, $\boldsymbol{X}^{el}$ contient 24 termes (3 dimensions $\times$ 8 nœuds).

De la même manière que pour l'interpolation de la position, si $\boldsymbol{u}^{el}$ représente l'ensemble des déplacements nodaux de l'élément fini. Alors le déplacement $\boldsymbol{u}$ (cf. figure 3.1) d'un point arbitraire de l'élément est interpolé à partir de ses déplacements nodaux. Lorsque les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour interpoler la position et le déplacement, l'élément est qualifié d'isoparamétrique.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}^f \boldsymbol{u}^{el}; \quad \delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}^f \delta\boldsymbol{u}^{el} \tag{3.23}$$

La différenciation de l'équation (3.21) permet d'obtenir l'expression discrétisée des champs de vitesse et d'accélération :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{N}^f \frac{d\boldsymbol{x}^{el}}{dt} = \boldsymbol{N}^f \boldsymbol{v}^{el} \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{N}^f \dot{\boldsymbol{v}^{el}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

$\boldsymbol{v}^{el}$ et $\dot{\boldsymbol{v}^{el}}$ dans l'équation ci-dessus sont définies comme les vitesses et accélérations nodales de l'élément fini. Pour la suite des développements, il est pertinent de développer l'expression discrétisée du tenseur de gradient de transformation pour un élément fini. Le tenseur $\boldsymbol{F}$ s'obtient en substituant l'expression discrétisée de la position $\boldsymbol{x}$ (cf. équation (3.19)) dans la définition du tenseur $\boldsymbol{F}$, donnée dans l'équation (3.2).

$$\boldsymbol{F} = \sum_{a=1}^{N_n} \frac{\partial N_a \boldsymbol{x}_a}{\partial \boldsymbol{X}} = \sum_{a=1}^{N_n} \boldsymbol{x}_a \frac{\partial N_a}{\partial \boldsymbol{X}} = \sum_{a=1}^{N_n} \boldsymbol{x}_a \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}}{}^T = \sum_{a=1}^{N_n} \boldsymbol{F}_a \tag{3.25}$$

Dans l'équation ci-dessus, le tenseur $\boldsymbol{F}_a$ représente la contribution d'un nœud au tenseur de gradient de transformation d'un élément fini. De plus, le tenseur $\boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}}$, contenant les dérivées des fonctions de forme, de dimension (3×1) est défini tel que :

$$\boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} = (\frac{\partial N_a}{\partial X_1}, \frac{\partial N_a}{\partial X_2}, \frac{\partial N_a}{\partial X_3})^T; \quad \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}} = (\frac{\partial N_a}{\partial x_1}, \frac{\partial N_a}{\partial x_2}, \frac{\partial N_a}{\partial x_3})^T; \quad \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{\zeta}} = (\frac{\partial N_a}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial N_a}{\partial \zeta_2}, \frac{\partial N_a}{\partial \zeta_3})^T \tag{3.26}$$

Avec,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{el}^{-T}} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{\zeta}} \\ \boldsymbol{N}^T_{a,\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{N}^T_{a,\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{N}^T_{a,\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{el}^{-1}} \boldsymbol{F}^{-1} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Pour la suite, il est intéressant d'exprimer la différentielle du gradient de transformation rapport à un déplacement nodal infinitésimal $d\boldsymbol{u}^{el}$. La variation infinitésimale de la position nodale courante $d\boldsymbol{x}^{el}$ se décompose tel que :

$$d\boldsymbol{x}^{el} = d(\boldsymbol{X}^{el} + \boldsymbol{u}^{el}) = d\boldsymbol{u}^{el}; \quad d\boldsymbol{x}_a = d\boldsymbol{u}_a \tag{3.28}$$

À partir des équations 3.25 et 3.28, la variation du gradient de transformation discrétisée est donnée par :

$$d\boldsymbol{F} = \sum_{a=1}^{N_n} d\boldsymbol{F}_a = \sum_{a=1}^{N_n} d\boldsymbol{F}_a = \sum_{a=1}^{N_n} d\boldsymbol{u}_a \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}}{}^T \tag{3.29}$$

Le tenseur de déformation virtuel de Green-Lagrange est également exprimé pour la suite des développements. Pour ce faire, la variation infinitésimale de l'équation (3.6) est développée.

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}(d\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{F}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N_n}(d\boldsymbol{F}_a{}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{F}_a) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N_n}(\boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} d\boldsymbol{u}_a{}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} d\boldsymbol{u}_a \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}}{}^T) = \sum_{a=1}^{N_n} d\boldsymbol{E}_a
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

Dans la méthode des éléments finis, la notion de matrice de déformations-déplacements (*strain-displacement matrix*) est récurrente. Cette matrice, notée $\boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}}$ pour un nœud, permet de relier le déplacement d'un nœud à sa contribution au tenseur de déformations de Green-Lagrange de l'élément $d\boldsymbol{E}_a$. Classiquement, ce tenseur est réarrangé en utilisant la notation de Voight et la matrice de déformations-déplacements est donnée par :

$$
d\boldsymbol{E}_{avd} = \boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}} d\boldsymbol{u}_a \tag{3.31}
$$

Les termes de $\boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}}$ s'obtiennent en développant les expressions 3.30 et 3.31 puis par identification des termes. Pour un nœud a, la matrice $\boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}}$ est alors donnée par :

$$
\boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\
\frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\
\frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_3} \\
\frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_3}{\partial X_3} + \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\
\frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_3}{\partial X_3} + \frac{\partial N_a}{\partial X_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\
\frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_a}{\partial X_1}\frac{\partial x_3}{\partial X_2} + \frac{\partial N_a}{\partial X_2}\frac{\partial x_3}{\partial X_1}
\end{pmatrix} \tag{3.32}
$$

Afin de s'affranchir de la somme sur les nœuds d'un éléments (cf. équation (3.30)), il est commun dans la MEF de définir une matrice de déformation-déplacements $\boldsymbol{B}_{,\boldsymbol{X}}$ pour l'ensemble de l'élément. Sa construction est détaillée ci-dessous :

$$
\boldsymbol{B}^{el}_{,\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{B}_{1,\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{B}_{2,\boldsymbol{X}}, ..., \boldsymbol{B}_{N_n,\boldsymbol{X}}) \tag{3.33}
$$

D'où la forme généralisée de l'équation (3.31),

$$d\boldsymbol{E_{vd}} = \boldsymbol{B}^{el}_{,\boldsymbol{X}} d\boldsymbol{u}^{el}; \quad d\boldsymbol{u}^{el} = (d\boldsymbol{u}_1{}^T, d\boldsymbol{u}_2{}^T, ..., d\boldsymbol{u}_{N_n}{}^T)^T \tag{3.34}$$

3.1.6 Équation du mouvement

Les expressions discrétisées des quantités cinématiques permettent de réexprimer les différentes contributions au travail virtuel pour un élément en introduisant les notions de matrice de masse ($\boldsymbol{M}^{el}$) et d'efforts nodaux internes et externes, notés respectivement $\boldsymbol{f}^{int}_{el}$ et $\boldsymbol{f}^{ext}_{el}$. Le détail du développement est présenté dans l'Annexe 5. Pour une structure discrétisée en N_{el} éléments finis, le PTV s'exprime comme la somme des travaux virtuels de chaque élément, telle que :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W} &= \sum_{el=1}^{N_{el}} \delta\mathcal{W}^{ext}_{el} - \delta\mathcal{W}^{int}_{el} - \delta\mathcal{W}^{cin}_{el} = 0 \\ &= \sum_{el=1}^{N_{el}} \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\boldsymbol{f}^{ext}_{el} - \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\boldsymbol{f}^{ext}_{el} - \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\boldsymbol{M}^{el}\dot{\boldsymbol{v}}^{el} = 0; \quad \boldsymbol{M}^{el} = \int_V \rho_0 \boldsymbol{N}^{f^T}\boldsymbol{N}^f dV\end{aligned} \tag{3.35}$$

Afin de s'affranchir de la somme sur les éléments, il est courant dans la MEF de définir des vecteurs et matrices globaux, regroupant les efforts nodaux et les matrices de masse de chaque élément. La matrice de masse globale $\boldsymbol{M}_g$ est construite en itérant sur chaque élément et en ajoutant chaque contribution ($\boldsymbol{M}^{el}$) à la matrice $\boldsymbol{M}_g$ en suivant les procédures d'assemblage classique d'éléments finis (J N Reddy 2005). Les déplacements, les vitesses et les efforts nodaux globaux ($\boldsymbol{u}^g$, $\boldsymbol{v}^g$, $\boldsymbol{f}^{ext}_g$ et $\boldsymbol{f}^{int}_g$) sont obtenus en assemblant les vecteurs nodaux de chaque éléments avec une méthode analogue à celle présentée dans l'équation (3.22). Par exemple, le vecteur des déplacements nodaux globaux est construit tel que :

$$\boldsymbol{u}^g = (\boldsymbol{u}^{1^T}, \boldsymbol{u}^{2^T}, ..., \boldsymbol{u}^{N_n{}^T})^T \tag{3.36}$$

Ici, les vecteurs $\boldsymbol{u}^1$,$\boldsymbol{u}^2$ et $\boldsymbol{u}^{N_{el}}$ sont analogues au vecteur $\boldsymbol{u}^{el}$ utilisé pour le développement de la contribution au travail virtuel d'un élément fini. Finalement, l'ordre des éléments dans le vecteur $\boldsymbol{u}^g$ se doit d'être cohérent avec l'ordre des éléments considéré pour la construction de la matrice de masse globale. Avec ces définitions, l'équation (3.35) se réécrit :

$$\delta \mathcal{W} = \delta \boldsymbol{u}^{gT} \boldsymbol{f}_g^{ext} - \delta \boldsymbol{u}^{gT} \boldsymbol{f}_g^{int} - \delta \boldsymbol{u}^{gT} \boldsymbol{M}_g \dot{\boldsymbol{v}}^g = 0 \tag{3.37}$$

Cette équation est valide pour n'importe quel déplacement virtuel, d'où :

$$\boldsymbol{f}_g^{ext} - \boldsymbol{f}_g^{int} = \boldsymbol{M}_g \dot{\boldsymbol{v}}^g \tag{3.38}$$

Dans cette thèse, les calculs éléments finis sont statiques, la résolution de l'équation (3.38) est donc détaillée en négligeant le terme d'inertie, ce qui revient à résoudre l'équation suivante :

$$\boldsymbol{f}_g^{int} - \boldsymbol{f}_g^{ext} = 0 \tag{3.39}$$

Dans cette équation, l'inconnue est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément $\boldsymbol{u}^g$. Cette équation ne peut être résolue directement en raison de la non-linéarité des efforts nodaux par rapport à $\boldsymbol{u}^g$. La méthode de Newton permet de résoudre de manière itérative l'équation (3.39). Soit n une itération quelconque de la résolution et $\boldsymbol{u}_n^g$ le vecteur des déplacement nodaux à cette même itération, l'équation (3.39) se réécrit :

$$\boldsymbol{f}_g^{int}(\boldsymbol{u}_n^g) - \boldsymbol{f}_g^{ext}(\boldsymbol{u}_n^g) = \boldsymbol{r}^g(\boldsymbol{u}_n^g) \tag{3.40}$$

Le vecteur $\boldsymbol{r}^g$ est appelé résidus globaux de la résolution à l'itération n. La solution $\boldsymbol{u}_n^g$ est considérée acceptable si à l'itération n, les résidus tendent vers un vecteur nul. La linéarisation des résidus globaux $\boldsymbol{r}^g$ donne :

$$\boldsymbol{r}^g(\boldsymbol{u}_{n+1}^g) = \boldsymbol{r}^g(\boldsymbol{u}_n^g) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}^g}{\partial \boldsymbol{u}^g}\right|_{\boldsymbol{u}_n^g} * (\boldsymbol{u}_{n+1}^g - \boldsymbol{u}_n^g) \tag{3.41}$$

L'expression de la dérivée des résidus globaux par rapport aux déplacements nodaux est développée dans l'Annexe 6. Elle fait apparaître la notion de matrice de raideur tangente globale, notée $\boldsymbol{K}_g^{tan}$ et construite à partir des contributions de chaque élément (notées $\boldsymbol{K}_{el}^{tan}$) en suivant les procédures classiques d'assemblage d'éléments finis. L'expression de la matrice de raideur tangente d'un élément est donnée par :

$$\boldsymbol{K}_{el}^{tan} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{el}} = \boldsymbol{K}_{el}^{mat} + \boldsymbol{K}_{el}^{geo} - \boldsymbol{K}_{el}^{ext} \tag{3.42}$$

Avec,

— La matrice de raideur tangente matérielle $\boldsymbol{K}_{el}^{mat}$, représentative de l'élasticité du solide.

$$\boldsymbol{K}_{el}^{mat} = \int_V \boldsymbol{B}_{,\boldsymbol{X}}^{el\,T} \boldsymbol{\mathcal{C}} \boldsymbol{B}_{,\boldsymbol{X}}^{el} dV \tag{3.43}$$

— La matrice de raideur géométrique $\boldsymbol{K}_{el}^{geo}$, représentative de la rigidité additionnelle due aux contraintes dans le matériaux.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_{el}^{geo} &= (\boldsymbol{K}_{el_1}^{geo}, \boldsymbol{K}_{el_2}^{geo}, ..., \boldsymbol{K}_{el_{N_n}}^{geo}) \\ \boldsymbol{K}_{el_a}^{geo} &= \left(G_1^a \boldsymbol{I_3}, G_2^a \boldsymbol{I_3}, ..., G_{N_n}^a \boldsymbol{I_3}\right); \quad G_b^a = \int_V \boldsymbol{N}_{b,\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV \end{aligned} \tag{3.44}$$

— La matrice de raideur des efforts externes $\boldsymbol{K}_{el}^{ext}$, permettant la prise en compte les changements d'aire et d'orientation des surfaces d'éléments finis déformés. Ce terme est calculé uniquement pour des cas de chargements continus. Dans cette thèse, seuls les efforts de pressions sont modélisés comme un champ de force continu.

$$\boldsymbol{K}_{el}^{ext} = \sum_{I=1}^{N_f} - \iint_{-1}^{1} p \boldsymbol{H}^{el} d\xi_{I1} d\xi_{I2}; \quad \boldsymbol{H}^{el} = (N_1 \boldsymbol{H}_1, N_2 \boldsymbol{H}_2, ..., N_{N_n} \boldsymbol{H}_{N_n}) \tag{3.45}$$

Le développement de ces matrices est présenté dans l'Annexe 6. Après définition des matrices de raideur élémentaires, l'équation (3.41) devient :

$$\boldsymbol{K}_g^{tan}(\boldsymbol{u}_n^g)(\boldsymbol{u}_{n+1}^g - \boldsymbol{u}_n^g) = \boldsymbol{f}_g^{ext}(\boldsymbol{u}_n^g) - \boldsymbol{f}_g^{int}(\boldsymbol{u}_n^g); \quad \boldsymbol{u}_0^g = \boldsymbol{0} \tag{3.46}$$

La solution de l'équation (3.39) est approchée avec la méthode de Newton, illustrée dans la figure 3.3. En effet, la relation (3.46), linéaire en $\boldsymbol{u}_{n+1}^g$, permet de calculer $\boldsymbol{u}_{n+1}^g$ à l'aide de la matrice de raideur tangente $\boldsymbol{K}_g^{tan}$, dépendant de l'état de déformation de la structure,.

Pour une itération n, l'inconnue de cette équation est le champ de déplacements nodal à l'itération suivante. La figure 3.3 illustre la non-linéarité de la relation entre les résidus et les déplacements. Pour un chargement nodal donné $\boldsymbol{f}_g^{ext}(\boldsymbol{u}_0^g)$, la résolution de l'équation (3.46) permet d'obtenir une valeur de déplacement $\boldsymbol{u}_1^g$. Du fait des non-linéarités, $\boldsymbol{u}_1^g$ n'est pas la solution du problème. Le calcul des résidus globaux $\boldsymbol{r}^g$, dépendant de l'état

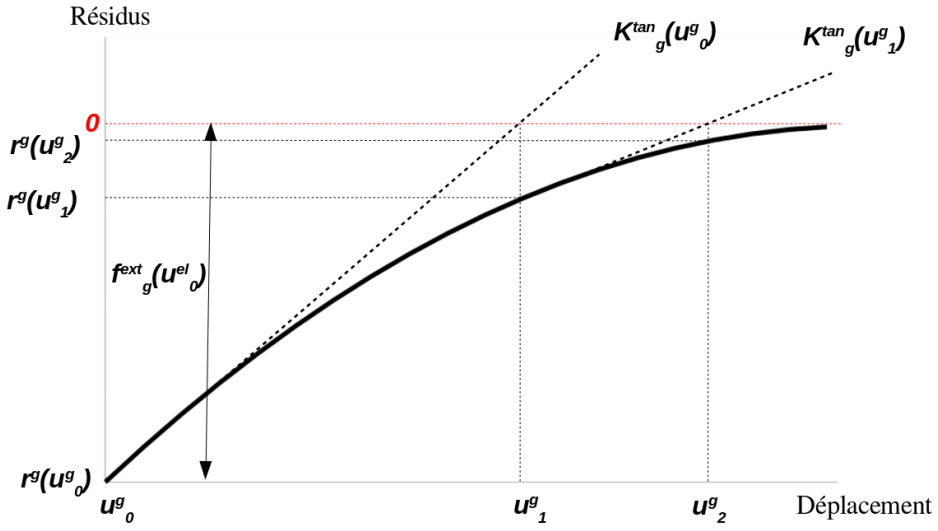


FIGURE 3.3 – Illustration de la méthode de résolution de Newton.

de déformation de la structure, permet d'évaluer la convergence de la résolution. Par définition, le résidu du calcul à une itération n est donnée comme la différence des efforts nodaux internes et externes. Après l'évaluation des résidus, un second déplacement nodal $\boldsymbol{u}_2^g$ est calculé en considérant une nouvelle matrice de raideur tangente évaluée pour un déplacement $\boldsymbol{u}_1^g$. Le protocole détaillé ci-dessus est répété jusqu'à ce que la valeur du résidu soit suffisamment faible, ce critère de convergence est défini arbitrairement en fonction du cas de chargement imposé.

3.1.7 Analyse modale

Il est intéressant d'introduire la notion d'analyse modale, permettant de prédire les fréquences propres d'une structure. Pour un foil, les fréquences propres renseignent la possibilité d'apparition de phénomènes de résonance pour une fréquence d'excitation donnée (associée à un écoulement instationnaire par exemple). Dans cette section, la théorie de l'analyse modale est brièvement présentée. Pour réaliser l'analyse modale d'une structure, celle-ci est étudiée sans chargement extérieur et les effets d'inertie ne sont plus négligés. Le foil évolue dans le vide, la méthode présentée ici est à adapter dans le cas particulier d'un foil immergé. Le PTV (tel qu'exprimé dans l'équation (3.37)) permet alors d'écrire :

$$\boldsymbol{M}^g \dot{\boldsymbol{v}}^g + \boldsymbol{f}_g^{int} = \boldsymbol{0} \tag{3.47}$$

À l'aide des développements présentés dans l'Annexe 6, il est possible de réexprimer les efforts nodaux internes globaux $\boldsymbol{f}_g^{int}$ d'une structure non déformée tels que :

$$\boldsymbol{f}_g^{int} = \boldsymbol{K}_g^{mat}(\boldsymbol{u}^g = \boldsymbol{0})\boldsymbol{u}^g = \boldsymbol{K}_{g0}^{mat}\boldsymbol{u}^g \tag{3.48}$$

L'équation (3.47) devient alors :

$$\boldsymbol{M}^g\dot{\boldsymbol{v}^g} + \boldsymbol{K}_{g0}^{mat}\boldsymbol{u}^g = \boldsymbol{0} \tag{3.49}$$

Pour résoudre ce type d'équation, une solution harmonique est admise pour les déplacements nodaux, tel que $\boldsymbol{u}^g = \boldsymbol{u}_m^g e^{i\omega t 2\pi}$ où $\boldsymbol{u}_m^g$,ω et t représentent les déplacements nodaux (forme des modes propres), la pulsation propre et le temps. Cette solution peut être injectée dans l'équation (3.49), ce qui donne :

$$\omega^2\boldsymbol{M}^g\boldsymbol{u}_m^g + \boldsymbol{K}_{g0}^{mat}\boldsymbol{u}_m^g = \boldsymbol{0} \tag{3.50}$$

L'équation (3.50) est un problème aux valeurs propres pour un élément. Sa résolution n'est pas présentée ici, nous retiendrons uniquement que le résultat est une infinité de modes propres $\boldsymbol{u}_{m_n}^g$ et de fréquences propres $f_n = \omega_n/2\pi$. Ce résultat nous indique quelles fréquences sont susceptibles d'exciter la structure et quel mode de déformation la structure va adopter.

3.2 Modélisation 3D

Dans cette section, la modélisation de la réponse élastique d'un foil avec la MEF est détaillée. La méthode présentée ici est classique (Liao et al. 2019c ; Liao et al. 2019a ; Temtching Temou 2020 ; Mohammed Arab 2020 ; Liao et al. 2021 ; Liao et al. 2023) et coûteuse en temps de calcul. La présentation du modèle est réalisée de manière à reproduire au mieux les essais en air réalisés sur les foils (cf. section 2.2). Les modifications apportées au modèle pour reproduire les expériences en bassin sont abordées dans la section 3.4.2.

Dans la suite du manuscrit, le modèle éléments finis haute fidélité est appelé *Abaqus 3D*. Dans ce modèle, le foil est décomposé en deux parties, une première représentant la peau en composite du foil et une seconde pour son âme en Airex. L'âme en Airex est modélisée avec des éléments finis 3D notée C3D8R dans *Abaqus*$^{\text{TM}}$ alors que la peau du foil est modélisée avec des éléments fini 2D STRI3. Un descriptif de ces éléments est

proposé avant de détailler la mise en place du modèle numérique *Abaqus 3D*.

3.2.1 Élément fini 3D C3D8R

L'élément C3D8R implémenté dans *Abaqus*™ se rapproche de l'élément fini utilisé pour présenter la MEF dans la section précédente (cf. figure 3.2). C'est un élément hexaédrique linéaire possédant 8 nœuds. Dans son repère réduit, ses fonctions de forme sont données par :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)(1-\zeta_3) \quad N_2 = \frac{1}{8}(1+\zeta_1)(1-\zeta_2)(1-\zeta_3) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(1-\zeta_3) \quad N_4 = \frac{1}{8}(1-\zeta_1)(1+\zeta_2)(1-\zeta_3) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)(1+\zeta_3) \quad N_6 = \frac{1}{8}(1+\zeta_1)(1-\zeta_2)(1+\zeta_3) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(1+\zeta_3) \quad N_8 = \frac{1}{8}(1-\zeta_1)(1+\zeta_2)(1+\zeta_3) \end{aligned} \tag{3.51}$$

L'origine du repère réduit est placée au centre de l'élément et les variables ζ_1, ζ_2 et ζ_3 varient entre -1 et 1. Pour l'intégration numérique des matrices de raideurs et de masse, deux méthodes sont communément utilisées, celle de Gauss et celle de Newton-Cotes. Dans *Abaqus*™, l'intégration est réalisée avec la méthode de Gauss. Classiquement, les intégrations sont réalisées avec 8 points de Gauss pour les éléments finis hexaédriques linéaires. Cependant, l'élément C3D8R utilisé ici est un élément dit à intégration réduite, ce qui signifie qu'un seul point de Gauss est utilisé pour l'intégration.

Pour des maillages équivalents, une structure discrétisée avec des éléments finis linéaires est plus raide qu'une structure discrétisée avec des éléments quadratiques. Afin de pallier à ce problème, il est possible de raffiner davantage le maillage, ce qui peut être coûteux en temps de calcul. L'intégration réduite permet alors d'*assouplir* les éléments C3D8R en cisaillement transverse sans avoir à générer un maillage trop fin. Finalement, une énergie interne numérique de contrôle hourglass est introduite dans *Abaqus*™.

3.2.2 Élement fini 2D STRI3

Dans cette section 3.2.2, la théorie des éléments finis modélisant la peau en composite du foil est brièvement présentée. L'élément coque 2D STRI3 implémenté dans *Abaqus*™ est basé sur la méthode présentée par (Batoz et al. 1980) et se place dans la théorie

de Kirchhoff-Love, où les membranes sont considérées suffisamment fines pour négliger le cisaillement transverse. Cela permet de définir la membrane comme une surface moyenne et un ensemble de lignes perpendiculaires à cette surface. La longueur de ces lignes correspond à l'épaisseur réelle de la plaque modélisée.

L'élément STRI3, illustré dans la figure 3.4, est composé de 3 nœuds possédant, pour ce qui concerne la flexion, 3 degrés de liberté chacuns, deux de rotations (θ_x et θ_y) et un de translation (w). La translation w est orientée selon la normale de la membrane, représentée par z dans la figure 3.4.

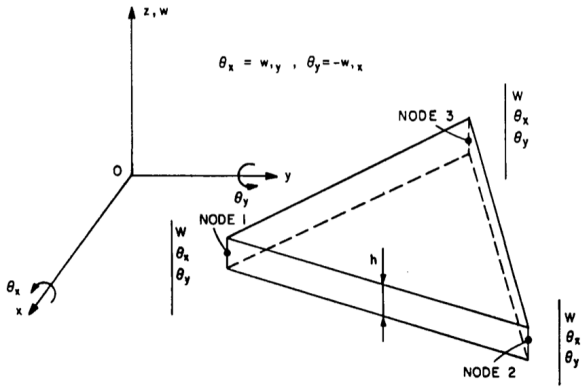


FIGURE 3.4 – Élément fini STRI3 (adaptée de (BATOZ et al. 1980)).

L'hypothèse réalisée sur le cisaillement est illustrée dans la figure 3.5, où S_{sup} et S_{moy} sont respectivement la surface supérieure et moyenne d'une membrane. La figure 3.5 montre les sections de la membrane qui restent perpendiculaires à la surface moyenne lorsque celle-ci est déformée. Cette hypothèse permet de relier les dérivées spatiales de la translation aux rotations (cf. figure 3.4).

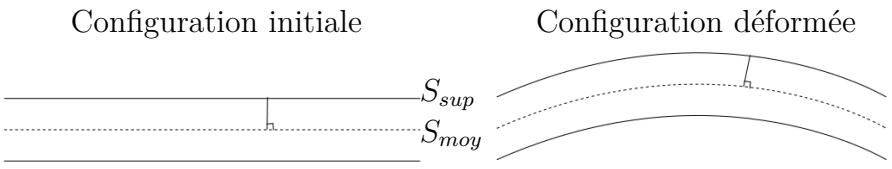


FIGURE 3.5 – Illustration de l'hypothèse de Kirchhoff-Love.

Dans l'hypothèse de Kirchhoff, le déplacement (u, v) dans le plan (x, y) (cf. figure 3.4) est donné par :

$$u = z\theta_y = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z\theta_x = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.52}$$

La translation w est interpolée de façon cubique en $(x,\ y)$. Plus de détails sur les fonctions de forme et l'implémentation de l'élément STRI3 sont disponibles dans (Batoz et al. 1980).

3.2.3 Mise en place du modèle

Dans les sections 3.2.1 et 3.2.2, les éléments finis 3D et 2D utilisés pour modéliser la structure du foil sont présentés. Pour rappel, l'âme du foil est discrétisée en éléments finis hexaédriques 3D et sa peau est discrétisée en éléments finis triangulaires 2D. Le modèle éléments finis *Abaqus 3D* présenté dans cette section est représentatif des essais en air (cf. section 2.2) et plus particulièrement de ses cas de chargements. La figure 3.6 illustre le modèle *Abaqus 3D* dans lequel sont définis trois points d'intérêts, appartenant tous au carcan utilisé pour suspendre une masse au foil :

- *loadingPoint* (X_l, Y_l, Z_l) : point du carcan où la masse est suspendue ;
- *cornerClampingBeam* (X_c, Y_c, Z_c) : point du coin du carcan choisie pour relever la mesure de déplacement et de rotation ;
- *CG_clampingBeam* (X_{cg}, Y_{cg}, Z_{cg}) : position du centre de gravité du carcan, utilisé pour prendre en compte le poids du carcan dans les simulations.

La position de la masse suspendue est modifiable en déplaçant le carcan le long de l'envergure et/ou en déplaçant la masse sur le carcan selon la direction de la corde du foil. Cela permet d'établir des relations entre les positions des 3 points d'intérêts. L'origine du repère défini dans Abaqus ™ est placé au niveau du bord de fuite du foil à l'encastrement (cf. figure 3.6), ce qui donne les expressions présentées dans le tableau 3.1 pour les coordonnées des points d'intérêts :

	loadingPoint	*cornerClampingBeam*	*CG_clampingBeam*
Position	$(X_l, 0.00, Z_l)$	$(0.25, 0.04, Z_l - 0.02)$	$(-0.2604, 0.00, Z_l)$

Table 3.1 – Position des points *loadingPoint*, *cornerClampingBeam* et *CG_clampingBeam*.

Afin d'avoir un cas de chargement représentatif de celui induit par le carcan, la peau du foil est partitionnée pour faire apparaître la surface de contact entre le carcan et le foil

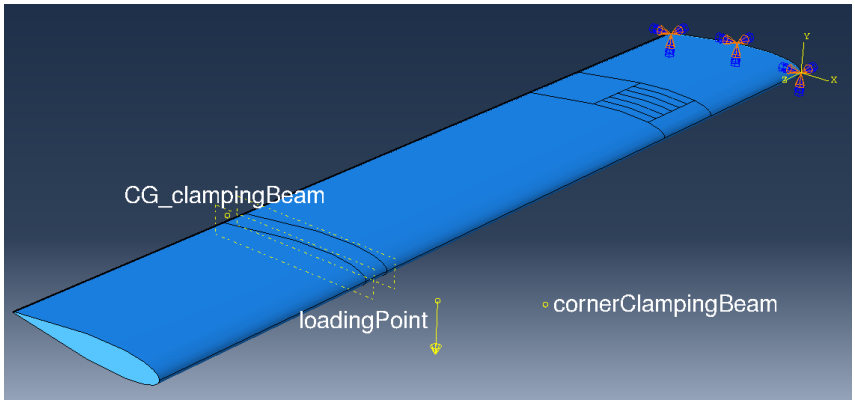


FIGURE 3.6 – Illustration des conditions limites et du chargement du foil pour le modèle éléments finis *Abaqus 3D*.

(cf. figure 3.6, où le carcan est situé à 80 cm de l'encastrement). Ensuite, cette surface est contrainte à suivre le *loadingPoint* dans un mode de corps rigide, ce qui permet de modéliser la distribution de la force ponctuelle induite par la présence du carcan. Pour faire cela dans *Abaqus*^{TM}, une contrainte MPC (*Multi-Point Constraint*) est définie. Cette contrainte est également utilisée pour lier rigidement les points *CG_clampingBeam* et *cornerClampingBeam* au *loadingPoint*. Un contrainte de type *Tie* est définie pour lier la peau du foil à son âme. Cette contrainte force la surface de l'âme à avoir les mêmes déplacements que la peau. En pratique, les déplacements de la surface maîtresse (la peau) sont interpolés sur la surface assujettie (l'âme). Afin d'assurer une bonne interpolation des déplacements, le maillage de la surface assujettie doit être plus fin que le maillage de la surface maîtresse. C'est pourquoi la taille caractéristique d'un élément de l'âme est définie comme la moitié de la taille d'un élément appartenant à la peau.

La figure 3.6 met en évidence une partition de la surface du foil près de l'encastrement. L'unique but de cette partition est de pouvoir facilement y extraire les déplacements locaux pour les comparer aux déplacements expérimentaux calculés au niveau du mouchetis (cf. section 2.2). Pour reproduire un cas de chargement expérimental, trois contributions sont définies :

— Masse suspendue : force verticale constante et non-suiveuse appliquée au *loadingPoint* (*Concentrated load* dans *Abaqus*^{TM}). Son expression est donnée par le produit de la masse suspendue ($m_s = 5$ kg) avec le champ de gravité terrestre $\boldsymbol{g}$;
— Poids du Foil : appliqué sur l'ensemble de la structure, sa contribution sur chaque élément est déduite du volume de celui-ci et de ses propriétés massiques. Dans

le cas d'éléments 2D, son volume est pris égal au produit de son aire et de son épaisseur (environ 0.4 mm dans notre cas). En pratique, un chargement de type *Gravity* est défini dans *Abaqus*™ ;

— Poids du Carcan : la masse du carcan (m_{carc} = 3.54 kg) est assignée au point *CG_clampingBeam*. Ensuite, le chargement de type *Gravity* prend en compte cette masse dans l'analyse par éléments finis. Cela revient à appliquer une force verticale non suiveuse au point *CG_clampingBeam*, définie par le produit de la masse du carcan et du champ de gravité terrestre.

De plus, comme pour les expériences, le foil est encastré à sa base. Numériquement, cela signifie que tous les points du foil appartenant au plan $Z = 0$ sont immobiles. Pour imposer ce type de contraintes en pratique, les termes relatifs aux degrés de liberté à contraindre dans l'équation matricielle d'équilibre (cf. équation (3.50)) sont enlevés. Enfin, les propriétés mécaniques assignées à l'âme et la peau du foil sont celles rappelées dans les tableaux 2.3 et 2.2. Sur les éléments coques modélisant la peau composite du foil, un *Composite Layup* est défini pour renseigner le nombre, la nature et l'épaisseur des plis composites. Ces informations sont ensuite utilisées par *Abaqus*™ pour homogénéiser les propriétés de la peau du foil et les assigner aux éléments coques STRI3.

Pour des cas de chargements avec des masses très excentrées, des problèmes de convergence de l'analyse statique non-linéaire peuvent apparaître. L'élément fini STRI3 a été choisi car il permettait la convergence de cas de chargement sollicitant beaucoup le foil. L'analyse par éléments finis non-linéaire est résolue de manière dynamique, en se basant sur la méthode d'Euler implicite (Hairer et al. 2008), telle que présentée dans (Sacher et al. 2020). L'amortissement naturel de cette méthode facilite la convergence vers un équilibre statique non-linéaire. Dans *Abaqus*™, une analyse dynamique implicite (*Dynamic Implicit Step*) quasi-statique est réalisée avant l'analyse statique. Dans l'étape dynamique, il faut définir le temps de la simulation T_{end}, le pas de temps initial T_0 et le pas de temps minimal T_{min}. Ces valeurs de temps sont issues d'une analyse modale réalisée au préalable et sont définies par :

$$T_{end} = \frac{3}{f_1} \quad ; \quad T_0 = \frac{0.05}{f_1} \quad ; \quad T_{min} = T_0.10^{-4} \tag{3.53}$$

Dans cette équation, f_1 représente la première fréquence propre de la structure du foil.

Convergence en maillage

Une convergence en maillage est réalisée afin de trouver le compromis entre le temps de calcul et la précision de la modélisation par éléments finis. Pour ce faire, la convergence est étudiée pour le foil le plus souple (a priori), avec l'orientation d'UD de $-50°$ car il est le plus susceptible de rencontrer des problèmes de convergence lors de sa modélisation numérique. De plus, le cas de chargement induisant le plus grand déplacement et la plus grande rotation est considéré. Les résultats expérimentaux renseignent le cas de chargement à retenir (cf. section 4.1.3), ses caractéristiques sont résumés dans le tableau ci-dessous :

angle UD (°)	X_l (m)	Z_l (m)	m_s (m)
-50	0.1	1.0	5

TABLE 3.2 – Cas de chargement retenu pour la convergence en maillage.

La convergence du maillage est réalisée en évaluant la convergence des résultats obtenus avec des maillages présentant des raffinements croissants. Les valeurs relevées sont le déplacement et la rotation du point *CG_clampingBeam* ainsi que la contrainte de Cauchy maximale selon l'envergure du foil σ_{33}^{max} dans la peau du foil. Les composantes du déplacement et de la rotation du coin du carcan sont notées Dx, Dy, Dz, Rx, Ry et Rz. Leurs magnitudes sont respectivement notées D_{mag} et R_{mag}. Cinq maillages sont testés, avec une taille caractéristique de maille pour la peau du foil variant de 10 cm à 4 mm. Les résultats obtenus avec chaque maillage sont comparés dans le tableau 3.3 à ceux obtenus avec le maillage le plus fin.

N°	Taille d'une maille de la peau	Nombres d'éléments	D_{mag} (m)	R_{mag} (°)	σ_{33}^{max} (Pa)	$\Delta {D_{mag}}^{fin}$ (%)	$\Delta {R_{mag}}^{fin}$ (%)	$\Delta \sigma_{33}^{max\,fin}$ (%)
1	0.1	862	4.36E-02	3.89	1.90E+05	56.367	52.124	55.631
2	0.05	2584	8.51E-02	7.05	1.77E+05	14.872	13.137	58.487
3	0.01	99219	9.95E-02	8.08	1.41E+05	0.503	0.458	67.080
4	0.005	723800	9.99E-02	8.12	4.13E+05	0.087	0.080	3.301
5	0.004	1445750	1.00E-01	8.12	4.27E+05	0.000	0.000	0.000

TABLE 3.3 – Résultats de la convergence en maillage du modèle éléments finis *Abaqus 3D*.

Ce tableau met en évidence la bonne convergence du modèle *Abaqus 3D* lors du raffinement du maillage éléments finis. Les valeurs du déplacement et de la rotation du

carcan semblent convergées dès le maillage 3. Cependant, pour ce maillage, la contrainte maximale dans le foil n'est pas encore convergée. En conséquence, la valeur retenue pour réaliser la convergence en maillage est la contrainte maximale dans le foil. Dans ce cas, le maillage 4 est retenu car c'est le maillage le moins fin pour lequel la différence relative sur la contrainte est inférieur à 5 %. Le maillage 4 est constitué de 700 000 éléments C3D8R pour modéliser l'âme et 60 000 éléments STRI3 pour la peau. Ces maillages sont illustrés dans la figure 3.7.

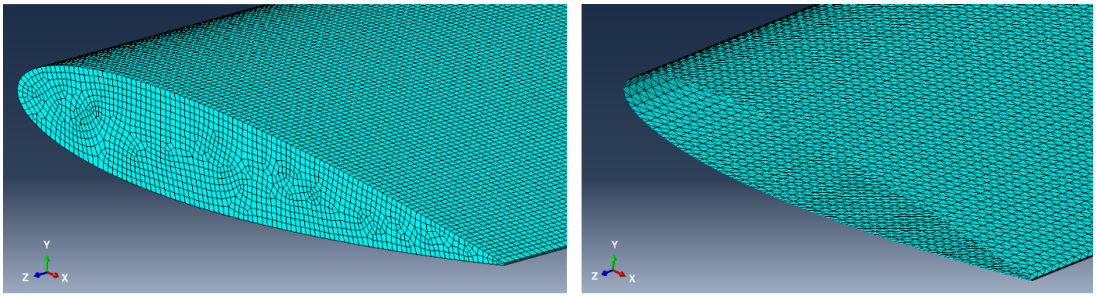


FIGURE 3.7 – Maillages retenus pour la peau et l'âme du foil dans le modèle éléments finis *Abaqus 3D*.

Dans la section suivante, la modélisation d'un foil en composite avec des éléments finis 1D de type poutres est présentée.

3.3 Modélisation 1D

La modélisation de la structure d'un foil telle que présentée dans la section précédente est coûteuse en ressources de calcul. Dans un processus d'optimisation, il est intéressant d'avoir des modèles numériques rapides permettant d'évaluer un maximum de designs différents. Dans cette optique, une modélisation numérique de foil des éléments finis 1D de type poutre, réduisant drastiquement le nombre de nœuds du maillage éléments finis et par conséquent le temps de calcul. Pour ce modèle, le problème structurel 3D est décomposé en une série d'analyses de sections 2D et une analyse par éléments finis non-linéaires 1D (HODGES 2006). Ce problème est classique pour des structures isotropes mais devient plus complexe pour des structures anisotropes et inhomogènes.

Les principales étapes de la modélisation d'un foil 3D avec une structure 1D sont les suivantes :

— Détermination des propriétés structurelles des sections du foil (problèmes 2D) ;

— Construction des éléments poutres équivalents ;
— Analyse par éléments finis du foil (problème 1D) ;
— Reconstruction des champs de contraintes et de déplacements 3D.

Cette décomposition du problème 3D est uniquement valide pour des structures allongées présentant de faibles variations de chargements et de propriétés structurelles et géométriques le long de leur envergure. Lors de la déformation d'une structure allongée, le mouvement de ses sections se décompose en une contribution rigide et une contribution de déformation. Dans la suite du manuscrit, la déformation de la section est définie comme le gauchissement.

Dans le cas d'une structure inhomogène telle que celles des foils présentés dans la section 2.1, la géométrie 3D est partitionnée en différentes régions correspondantes aux différents matériaux (UD, taffetas et Airex pour les foils étudiés). Ensuite, cette géométrie partitionnée est découpée en une multitude de sections tout au long de son envergure, illustrée en rouge dans la figure 3.8. Pour chacune des sections, ses propriétés équivalentes sont prédites numériquement. Le nombre de découpe optimal dépend des variations structurelles et géométriques du foil le long de son envergure. Par exemple, un foil prismatique nécessite une seule découpe car par définition, sa section est constante le long de son envergure.

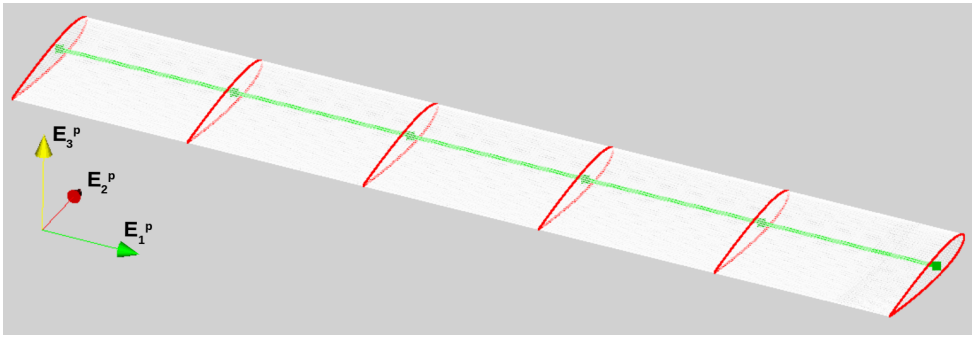


FIGURE 3.8 – Illustration de la découpe de la géométrie 3D d'un en six sections.

Après avoir caractérisé les propriétés équivalentes du foil le long de son envergure, des éléments poutres équivalents sont reconstruits (en vert dans la figure 3.8), ce qui nécessite de définir une ligne de référence (*ligne centrale* de la poutre). En première approximation, les nœuds des éléments poutres passent par le centre géométrique des sections. Ensuite, la position des nœuds des éléments poutres est corrigée afin qu'ils soient confondus avec les centres de cisaillement des sections. Le centre de cisaillement d'une section est défini

comme le point où n'importe quelle force peut être appliquée sans induire de torsion, son expression est donnée dans la section suivante.

La principale difficulté de la modélisation d'un foil avec des éléments poutres réside dans la détermination des propriétés équivalentes d'une section anisotrope et inhomogène, dont la méthode est présentée dans la section 3.3.1. Ensuite, la section 3.3.2 détaille la théorie du modèle de poutre équivalente. Pour finir, le modèle numérique reproduisant les expériences présentées dans les sections 2.2 et 2.3 est détaillé dans la section 3.3.3. Les analyses de sections réalisées dans le cadre de cette thèse sont mises en place avec les outils implémentés dans la version 2022 d'Abaqus™. Le modèle poutre est appelé *Abaqus 1D* dans la suite du manuscrit.

3.3.1 Analyse de sections

Cette section détaille la méthode de détermination des propriétés équivalentes d'une section inhomogène et anisotrope. Les propriétés équivalentes d'une section sont données sous la forme d'une matrice de raideur de Timoshenko $\boldsymbol{K^{cs}}$ reliant les forces appliquées à une section à ses déformations telle que :

$$\begin{pmatrix} T_1^p \\ T_2^p \\ T_3^p \\ M_1^p \\ M_2^p \\ M_3^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{cs} & K_{12}^{cs} & K_{13}^{cs} & K_{14}^{cs} & K_{15}^{cs} & K_{16}^{cs} \\ K_{12}^{cs} & K_{22}^{cs} & K_{23}^{cs} & K_{24}^{cs} & K_{25}^{cs} & K_{26}^{cs} \\ K_{13}^{cs} & K_{23}^{cs} & K_{33}^{cs} & K_{34}^{cs} & K_{35}^{cs} & K_{36}^{cs} \\ K_{14}^{cs} & K_{24}^{cs} & K_{34}^{cs} & K_{44}^{cs} & K_{45}^{cs} & K_{46}^{cs} \\ K_{15}^{cs} & K_{25}^{cs} & K_{35}^{cs} & K_{45}^{cs} & K_{55}^{cs} & K_{56}^{cs} \\ K_{16}^{cs} & K_{26}^{cs} & K_{36}^{cs} & K_{46}^{cs} & K_{56}^{cs} & K_{66}^{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^p \\ \tau_2^p \\ \tau_3^p \\ \kappa_1^p \\ \kappa_2^p \\ \kappa_3^p \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

Cette matrice permet ensuite de définir des éléments poutres équivalents au modèle *Abaqus 3D*, ce qui est détaillée dans la section suivante. La signification des termes diagonaux de $\boldsymbol{K^{cs}}$ est donnée ci-dessous, en considérant que la direction 1 est normale à la section :

- K_{11}^{cs} :Raideur en élongation ;
- K_{22}^{cs}, K_{33}^{cs} : Raideurs en cisaillement ;
- K_{44}^{cs} Raideur en torsion ;
- K_{55}^{cs}, K_{66}^{cs} : Raideurs en flexion.

Les termes non-diagonaux représentent des couplages entre les directions de déformation tels que le couplage extension-torsion ou bien le couplage flexion-extension. Pour des foils étudiées en interactions fluide-structure, le couplage présentant le plus d'impact est le

couplage flexion-torsion car il peut induire une variation significative de l'angle d'attaque d'un foil fléchi par des efforts hydrodynamiques. Ce couplage est caractérisé par les termes K_{46}^{cs} et K_{56}^{cs} de la matrice de raideur de Timoshenko. Cette matrice permet également de définir le centre de cisaillement de la section, utilisé ensuite pour définir les positions des nœuds des éléments poutres reconstruits. En pratique, deux analyses de sections sont nécessaires, une première réalisée avec une origine arbitraire (centre géométrique dans notre cas) pour déterminer le centre de cisaillement et une seconde réalisée en prenant le centre de cisaillement comme origine, afin de déterminer les propriétés équivalentes de la section au niveau du centre de cisaillement. (Hodges 2006) montre que le centre de cisaillement (point 2D) d'une section se calcule à partir de sa matrice de souplesse $\boldsymbol{S^{cs}}$ défini comme l'inverse $\boldsymbol{K^{cs}}^{-1}$ de la matrice de raideur.

$$X_2^{cis} = -\frac{S_{34}^{cs}}{S_{44}^{cs}}; \quad X_3^{cis} = \frac{S_{24}^{cs}}{S_{44}^{cs}} \tag{3.55}$$

Le centre de cisaillement calculé est ensuite défini comme l'origine pour réaliser une seconde analyse de section, renseignant les propriétés équivalentes de la section évaluée au niveau de son centre de cisaillement. En plus de la matrice de raideur, les propriétés massiques (masse linéique, inertie) et les fonctions de gauchissement de la section sont déterminées. Les fonctions de gauchissement décrivent les modes de déformation de la section et permettent ensuite de déterminer les champs de déplacements et de contraintes dans la section 2D à partir des efforts nodaux des éléments poutres. Afin d'analyser une section, celle-ci est maillée et ses propriétés élastiques sont intégrées sur sa surface. Un exemple de maillage pour une section de type NACA0015 est donné dans la figure 3.9, où l'orientation du repère $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ est imposée par Abaqus^{TM}. Le repère retenu $(\boldsymbol{E_1}^p, \boldsymbol{E_2}^p, \boldsymbol{E_3}^p)$ pour le développement de la méthode de l'analyse de section est également illustré dans la figure 3.9.

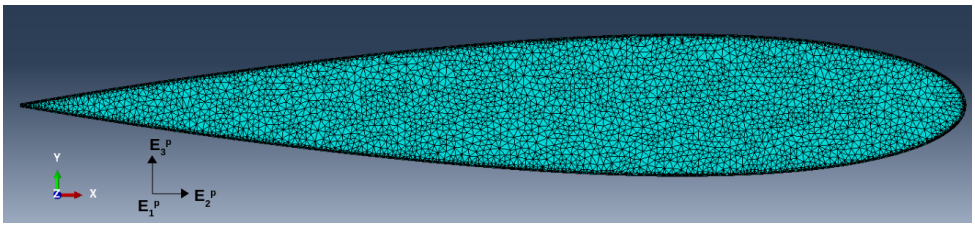


Figure 3.9 – Maillage triangulaire de la section d'un foil.

La méthode implémentée dans Abaqus^{TM} (Han et al. 2015) est complexe et différente

de celle implémentée dans le logiciel VABS (Yu et al. 2012b). Dans VABS, la méthode est basée sur un développement asymptotique par rapport à la déformation axiale et le rapport d'aspect du foil. La matrice de raideur calculée dans VABS est associée à des déformations de sections relatives à ses mouvements rigides. Dans Abaqus^{TM}, la méthode est basée sur la stationnarité de l'Hamiltonien, en considérant le gauchissement de la section et son impulsion duale. Avec cette méthode, les déformations de la section prennent en compte son mouvement rigide mais également son gauchissement.

Principe des travaux virtuels

L'analyse de sections implémentée dans Abaqus^{TM}, proposée par (Han et al. 2015), est basée sur les travaux de (Giavotto et al. 1983). Les deux méthodes donnent des résultats quasi-identiques et leur principale différence est le point de départ considéré pour la mise en place des équations gouvernant le problème. Dans (Han et al. 2015), elles sont dérivées de l'approche canonique d'Hamilton alors que dans (Giavotto et al. 1983), elles sont dérivées du principe des travaux virtuels. Pour simplifier la présentation de la méthode, l'approche de (Giavotto et al. 1983) est adoptée, car le PTV est introduit dans la section précédente. La méthode présentée ici repose sur deux hypothèses :

— La section de la poutre est constante selon la direction longitudinale ;

— La poutre est soumise à un effort ponctuel à son extrémité.

Soit une poutre initialement droite (pas de courbure ni de vrillage initial), cette section présente le développements des équations d'équilibre d'une tranche infiniment fine de cette poutre. Le repère considéré, noté $E^p = (\boldsymbol{E_1}^p, \boldsymbol{E_2}^p, \boldsymbol{E_3}^p)$ est illustré dans la figure 3.10, est celui de la poutre, où l'axe $\boldsymbol{E_1}^p$ est colinéaire à la ligne centrale de la poutre. Afin d'éviter toute confusion avec les sections précédentes, les quantités introduites dans cette section sont accompagnées d'un exposant p pour *poutre*.

L'analyse de sections présentée ici est linéaire et se place dans le cadre des petites déformations. Cela signifie que la mesure de déformations retenue est le tenseur de déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}^p$ défini dans l'équation (3.4). Dans ce cadre, il est possible d'exprimer les équations d'équilibre dans la base initiale du solide déformable, autrement dit, le tenseur du gradient de transformation tend vers une matrice identité. La poutre étudiée est illustrée dans la figure 3.10 avec une tranche infiniment fine et initialement plane, passant par O_1 telle que $O_1 - O = X_1^p \boldsymbol{E_1}^p$.

Dans cette figure apparaissent les efforts et moments appliquée sur la section, notés respectivement $\boldsymbol{T}^p = (T_1^p, T_2^p, T_3^p)^T$ et $\boldsymbol{M}^p = (M_1^p, M_2^p, M_3^p)^T$, ils sont calculés en intégrant

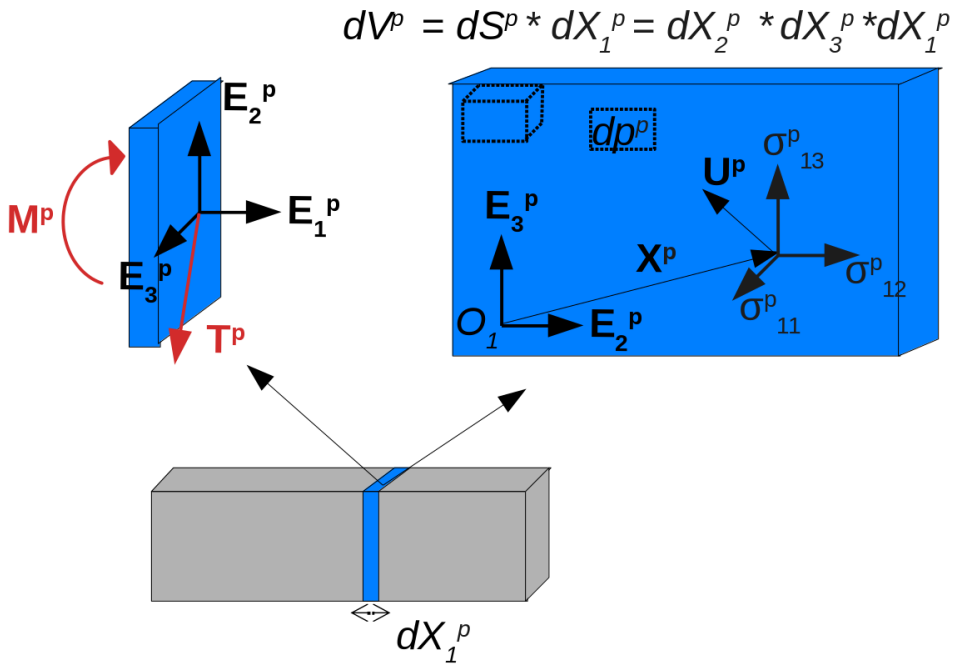


FIGURE 3.10 – Section d'une poutre.

les contraintes dans le plan de la section. On définit également le vecteur $\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p$, construit comme l'assemblage des vecteurs $\boldsymbol{T}^p$ et $\boldsymbol{M}^p$ ($\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p = (\boldsymbol{T}^{pT}, \boldsymbol{M}^{pT})^T$). Ce vecteur est représentatif des efforts appliqués sur la section, et apparait dans l'équation de la matrice de raideur de Timoshenko. Dans le repère E^s, les composantes des efforts et moments en O_1 intégrées sont données par :

$$\begin{aligned} T_1^p &= \int_{S^p} \sigma_{11}^p dS^p \quad ; \quad M_1^p = \int_{S^p} X_2^p \sigma_{13}^p - X_3^p \sigma_{12}^p dS^p \\ T_2^p &= \int_{S^p} \sigma_{12}^p dS^p \quad ; \quad M_2^p = \int_{S^p} X_3^p \sigma_{11}^p \\ T_3^p &= \int_{S^p} \sigma_{13}^p dS^p \quad ; \quad M_3^p = -\int_{S^p} X_2^p \sigma_{11}^p dS^p \end{aligned} \tag{3.56}$$

Une notation de Voight alternative à celle présentée dans la section 3.1.4 est adoptée. Dans celle-ci, les contraintes dans le plan sont placées à la fin du vecteur de contraintes de Voight, noté $\boldsymbol{\sigma_{vc}}^p$. La même modification est apportée au vecteur de déformation $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^p$, défini par :

$$\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^p = (\epsilon_{22}^p, \epsilon_{33}^p, 2\epsilon_{23}^p, \epsilon_{11}^p, 2\epsilon_{12}^p, 2\epsilon_{13}^p)^T \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{vc}}^p = (\sigma_{22}^p, \sigma_{33}^p, \sigma_{23}^p, \sigma_{11}^p, \sigma_{12}^p, \sigma_{13}^p)^T \tag{3.58}$$

De la même manière, l'opérateur de Hooke est modifié pour être cohérent avec la nouvelle notation adoptée, cette matrice est alors notée $\boldsymbol{\mathcal{C}}^p$. En définissant le vecteur de contraintes dans le plan de la section $\boldsymbol{p}^p = (\sigma_{11}^p, \sigma_{12}^p, \sigma_{13}^p)$, il est possible de réécrire l'équation (3.56) sous forme matricielle.

$$\boldsymbol{T}^p = \int_{S^p} \boldsymbol{p}^p dS^p; \quad \boldsymbol{M}^p = \int_{S^p} \boldsymbol{z}^p \boldsymbol{p}^p dS^p; \quad \boldsymbol{z}^p = \begin{pmatrix} 0 & -X_3^p & X_2^p \\ X_3^p & 0 & 0 \\ -X_2^p & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

Les équations d'équilibre de la section s'obtiennent à partir du PTV statique (terme d'inertie nul), tel qu'exprimé dans l'équation (3.9). Le champ de déplacement virtuel est noté ici $\delta \boldsymbol{U}^p$. Pour la composante externe du travail virtuel, le seul effort externe considéré est l'effort $\boldsymbol{T}^p$, représentatif de la force exercée par le reste de la poutre sur la tranche considérée, d'épaisseur dX_1^p. Le travail virtuel de l'effort externe $\boldsymbol{T}^p$ est obtenue en intégrant le produit scalaire du vecteur de contraintes de traction $\boldsymbol{p}^p$ avec le vecteur de déplacement virtuel $\delta \boldsymbol{U}^p$. Sachant que la poutre est soumise à un effort ponctuel à son extrémité, les seules régions de la tranche de poutre où le vecteur de contraintes de traction est non-nulle sont les faces internes de la tranche (avec une normale orientée selon $\boldsymbol{E_1}^p$). De plus, la poutre n'est soumise à aucune force volumique.

$$\delta \mathcal{W}_{ext}^p = \int_{S^p(X_1^p + dX_1^p)} \boldsymbol{p}^p(X_1^p + dX_1^p) \cdot \delta \boldsymbol{U}^p dS^p - \int_{S^p(X_1^p)} \boldsymbol{p}^p(X_1^p) \cdot \delta \boldsymbol{U}^p dS^p \tag{3.60}$$

Sachant que la section est constante le long de la poutre, $S^p(X_1^p + dX_1^p) = S^p(X_1^p)$, ce qui implique :

$$\delta \mathcal{W}_{ext}^p = \int_{S^p(X_1^p)} (\boldsymbol{p}^p(X_1^p + dX_1^p) - \boldsymbol{p}^p(X_1^p)) \cdot \delta \boldsymbol{U}^p dS^p \tag{3.61}$$

Il est également possible d'écrire :

$$\frac{1}{dX_1^p}\delta\mathcal{W}_{ext}^p = \int_{S^p(X_1^p)} \frac{\delta \boldsymbol{U}^{pT}(\boldsymbol{p}^p(X_1^p + dX_1^p) - \boldsymbol{p}^p(X_1^p))}{dX_1^p} dS^p \tag{3.62}$$

Dans la suite du manuscrit, $S^p(X_1^p)$ est noté S^p pour des raisons de concision. La tranche étant infiniment fine, le terme de droite de l'équation (3.61) est assimilable à une dérivée. Le travail virtuel externe linéique $\delta\mathcal{W}_{*ext}^p$ est alors défini comme le quotient du travail virtuel externe par l'épaisseur de la section :

$$\delta\mathcal{W}_{ext}^{*p} = \frac{1}{dX_1^p}\delta\mathcal{W}_{ext}^p = \int_{S^p} \frac{\partial(\delta \boldsymbol{U}^{pT}\boldsymbol{p}^p)}{\partial X_1^p} dS^p \tag{3.63}$$

La composante interne du travail virtuel s'obtient en simplifiant la composante interne de l'équation (3.9) avec l'hypothèse des petites déformations. En considérant cette hypothèse, le produit tensoriel $\delta\boldsymbol{F}^p\boldsymbol{F}^{p-1}$ se simplifie en :

$$\delta\boldsymbol{F}^p\boldsymbol{F}^{p-1} = \frac{\partial\delta\boldsymbol{U}^p}{\partial\boldsymbol{X}^p}\underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{X}^p}{\partial\boldsymbol{x}^p}}_{\approx\boldsymbol{I_3}} \approx \frac{\partial\delta\boldsymbol{U}^p}{\partial\boldsymbol{X}^p} \tag{3.64}$$

Le travail virtuel des efforts internes se réécrit alors tel que :

$$\delta\mathcal{W}_{int}^p = \int_{V^p} \boldsymbol{\sigma}^p : \frac{\partial\delta\boldsymbol{U}^p}{\partial\boldsymbol{X}^p} dV^p = \int_{V^p} \boldsymbol{\sigma}^p : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p dV^p = \int_{V^p} \delta{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{vd}}}^{pT}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{vc}}}^p dV^p \tag{3.65}$$

La tranche étant infiniment fine (épaisseur = dX_1^p), la composante interne du travail virtuel ne dépend pas de la composante normale X_1^p, donc :

$$\delta\mathcal{W}_{int}^p = \int_{S^p} \delta{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{vd}}}^{pT}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{vc}}}^p dS^p dX_1^p \tag{3.66}$$

De la même manière que pour l'équation (3.63), le travail virtuel interne linéique est défini tel que :

$$\delta\mathcal{W}_{int}^{*p} = \frac{1}{dX_1^p}\delta\mathcal{W}_{int}^{p} = \int_{S^p} \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pT}\boldsymbol{\sigma_{vc}}^{p} dS^p \tag{3.67}$$

Le PTV statique sur la tranche de poutre d'épaisseur dX_1^p donne :

$$\delta\mathcal{W}^{p} = \delta\mathcal{W}_{ext}^{p} - \delta\mathcal{W}_{int}^{p} = (\delta\mathcal{W}_{ext}^{*p} - \delta\mathcal{W}_{int}^{*p})dX_1^p = 0 \tag{3.68}$$

D'où la forme linéique du PTV :

$$\delta\mathcal{W}^{*p} = \delta\mathcal{W}_{ext}^{*p} - \delta\mathcal{W}_{int}^{*p} = \int_{S^p} \frac{\partial(\delta\boldsymbol{U}^{pT}\boldsymbol{p}^p)}{\partial X_1^p} dS^p - \int_{S^p} \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pT}\boldsymbol{\sigma_{vc}}^{p} dS^p = 0 \tag{3.69}$$

Cinématique et Discrétisation

Le champ de déplacement des points d'une section de poutre $\boldsymbol{U}^p$ se décompose en une première contribution associée au mouvement de corps rigide ($\boldsymbol{V^p}$) de la ligne centrale de la poutre et une seconde associée au gauchissement de la section, notée $\boldsymbol{G^p}$. Le déplacement rigide de la section est fonction d'une composante de translation et de rotation rassemblé dans le vecteur $\boldsymbol{\eta}^p = (U_{c1}^p, U_{c2}^p, U_{c3}^p, \phi_{c1}^p, \phi_{c2}^p, \phi_{c3}^p)^T$ (champ de déplacement de la ligne centrale de la poutre). La rotation quelconque définie par les termes ϕ_{ci}^p est appliquée autour de l'origine de la section. Le champ de déplacement rigide des points de la section (initialement plane) est alors donné, dans l'hypothèse des petites rotations, par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^p &= \begin{pmatrix} U_{c1}^p \\ U_{c2}^p \\ U_{c3}^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & X_3^p & -X_2^p \\ -X_3^p & 0 & 0 \\ X_2^p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{c1}^p \\ \phi_{c2}^p \\ \phi_{c3}^p \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{Z}^p\boldsymbol{\eta}^p; \quad \boldsymbol{Z}^p = (\boldsymbol{I_3}, \boldsymbol{z}^{pT})\end{aligned} \tag{3.70}$$

Il est également possible de montrer que la matrice $\boldsymbol{Z}^p$ permet d'obtenir l'expression du vecteur $\boldsymbol{T}^p$ (contenant les efforts et moments intégrés sur la section) telle que :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p = \int_{S^p} \boldsymbol{Z}^{pT} \boldsymbol{p}^p dS^p \tag{3.71}$$

Ensuite, le champ de déplacement total de la section, comprenant le mouvement de corps rigide et le gauchissement, s'écrit sous la forme d'une somme donnée par :

$$\boldsymbol{U}^p = \boldsymbol{G}^p + \boldsymbol{V}^p = \boldsymbol{G}^p + \boldsymbol{Z}^p \boldsymbol{\eta}^p \tag{3.72}$$

En considérant la notation de Voight alternative de l'équation (3.57) et l'expression du tenseur de déformations infinitésimales de l'équation (3.4), il est possible d'écrire les déformations $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^p$ dues à un champ de déplacement $\boldsymbol{U}^p$ sous une forme matricielle particulière. Cette expression émerge de la séparation des termes du tenseur de déformations faisant apparaitre une dérivée par rapport à la normale de la section :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{22}^p \\ \epsilon_{33}^p \\ 2\epsilon_{23}^p \\ \epsilon_{11}^p \\ 2\epsilon_{12}^p \\ 2\epsilon_{13}^p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial X_2^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3^p} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3^p} & \frac{\partial}{\partial X_2^p} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2^p} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3^p} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}^p} \begin{pmatrix} U_1^p \\ U_2^p \\ U_3^p \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{S}^p} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial U_2^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial U_3^p}{\partial X_1^p} \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

$$\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^p = \boldsymbol{B}^p \boldsymbol{U}^p + \boldsymbol{S}^p \frac{\partial \boldsymbol{U}^p}{\partial X_1^p} \tag{3.74}$$

En séparant les contributions du gauchissement et du mouvement de corps rigide, l'expression ci-dessus devient :

$$\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^p = \boldsymbol{B}^p \boldsymbol{G}^p + \boldsymbol{B}^p \boldsymbol{Z}^p \boldsymbol{\eta}^p + \boldsymbol{S}^p \frac{\partial \boldsymbol{G}^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{Z}^p \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^p}{\partial X_1^p} \tag{3.75}$$

Dans ses développements, (Giavotto et al. 1983) fait apparaitre une mesure de déformation d'un élément poutre, associée au mouvement de corps rigide d'une section. La mesure de déformation de la ligne centrale d'une poutre, apparaissant dans l'équation

(3.54), notée $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$ est définie par :

$$\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} = \begin{pmatrix} \tau_1^p \\ \tau_2^p \\ \tau_3^p \\ \kappa_1^p \\ \kappa_2^p \\ \kappa_3^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{c1}^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial U_{c2}^p}{\partial X_1^p} - \phi_{c3}^p \\ \frac{\partial U_{c3}^p}{\partial X_1^p} + \phi_{c2}^p \\ \frac{\partial \phi_{c1}^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial \phi_{c2}^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial \phi_{c3}^p}{\partial X_1^p} \end{pmatrix} = \boldsymbol{t}^p \boldsymbol{\eta}^p + \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^p}{\partial X_1^p}; \quad \boldsymbol{t}^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

Il est important de noter que les mesures de déformation $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$ et $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{p}$ sont différentes, même au niveau de l'axe neutre ($X_2^p = X_3^p = 0$). Afin de faire apparaitre la mesure de déformation généralisée $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$ dans l'expression de $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{p}$, il est possible de montrer que :

$$\boldsymbol{B}^p \boldsymbol{Z}^p = \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{Z}^p \boldsymbol{t}^p \tag{3.77}$$

Cela permet de réécrire l'équation (3.75) tel que :

$$\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{p} = \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{Z}^p \underbrace{(\boldsymbol{t}^p \boldsymbol{\eta}^p + \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^p}{\partial X_1^p})}_{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}} + \boldsymbol{B}^p \boldsymbol{G}^p + \boldsymbol{S}^p \frac{\partial \boldsymbol{G}^p}{\partial X_1^p} \tag{3.78}$$

Pour résoudre l'équilibre de la section, le gauchissement est discrétisé sur un ensemble d'éléments finis. De la même manière que pour des éléments finis 3D, des fonctions de forme N_a^p sont définis pour chacun des nœuds de l'élément. L'analyse de section est détaillée pour un élément à N_n^p nœuds, la généralisation à un maillage complet est discutée à la fin de cette section.

Dans le cadre de la thèse, des éléments triangulaires (cf. figure 3.11) sont considérés avec des fonctions de formes définies telles que :

$$\boldsymbol{G}^p = \boldsymbol{N_s}^p \boldsymbol{G}_{el}^p; \quad \boldsymbol{N_s}^p = \begin{pmatrix} N_{s1}^p & 0 & 0 & N_{s2}^p & 0 & 0 & N_3^p & 0 & 0 \\ 0 & N_{s1}^p & 0 & 0 & N_{s2}^p & 0 & 0 & N_3^p & 0 \\ 0 & 0 & N_{s1}^p & 0 & 0 & N_{s2}^p & 0 & 0 & N_3^p \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

Dans cette équation, le vecteur $\boldsymbol{G}_{el}^p$ est construit comme un assemblage des 3 déplace-

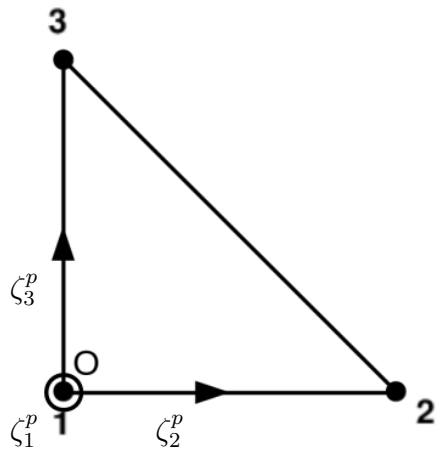


FIGURE 3.11 – Élément fini triangulaire dans son repère isoparamétrique.

ments nodaux d'un élément triangulaire ($\boldsymbol{G}_{el}^p = (\boldsymbol{G}_1^{pT}, \boldsymbol{G}_2^{pT}, \boldsymbol{G}_3^{pT})^T$). De plus, les fonctions de formes dans le repère réduit sont données par :

$$N_{s1}^p = 1 - \zeta_2^p - \zeta_3^p; \quad N_{s2}^p = \zeta_2^p; \quad N_3^p = \zeta_3^p \tag{3.80}$$

Dans l'équation (3.80), les coordonnées ζ_2^p et ζ_3^p du repère réduit varient toutes les deux entre 0 et 1. Sachant que la dérivée des fonctions de formes par rapport à la direction normale de la section est nulle, la déformation de la section se réécrit.

$$\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^p = \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{Z}^p \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} + \boldsymbol{B}^p \boldsymbol{N_s}^p \boldsymbol{G}_{el}^p + \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{N_s}^p \frac{\partial \boldsymbol{G}_{el}^p}{\partial X_1^p} \tag{3.81}$$

Pour déterminer le produit matriciel $\boldsymbol{B}^p \boldsymbol{N_s}^p$ dans l'équation (3.81), il faut déterminer les dérivées des fonctions de forme dans le repère réel. Celles-ci sont obtenues à partir des dérivées des fonctions de forme dans le repère isoparamétrique et le Jacobien de l'élément.

$$\boldsymbol{J}_{el}^p = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial X_2^p}{\partial \zeta_2^p} & \frac{\partial X_2^p}{\partial \zeta_3^p} \\ 0 & \frac{\partial X_3^p}{\partial \zeta_2^p} & \frac{\partial X_3^p}{\partial \zeta_3^p} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial}{\partial X_2^p} \\ \frac{\partial}{\partial X_3^p} \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{el}^{p\,-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1^p} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2^p} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3^p} \end{pmatrix} \tag{3.82}$$

De la même manière que pour les déformations, le champ de déplacement des points

de la section se réécrit :

$$\boldsymbol{U}^p = \boldsymbol{N_s}^p \boldsymbol{G}^p_{el} + \boldsymbol{Z}^p \boldsymbol{\eta}^p \tag{3.83}$$

Le champ de déplacement dans la section doit être contraint car dans l'expression de l'équation (3.83), le terme associé au gauchissement est en mesure de reproduire un mouvement de corps rigide. Afin d'éviter cette redondance, le gauchissement discrétisé $\boldsymbol{G}^p_{el}$ et sa dérivée (associé respectivement au translation et rotation de corps rigide) sont contraints, ce qui donne pour un élément fini avec N^p_n nœuds :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^{p\,T}_{el} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}^{p\,T}_{el} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \boldsymbol{G}^p_{el} \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

$$\boldsymbol{D}^p_{el} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I_3} & & & & \boldsymbol{I_3} & \\ 0 & -X^p_{13} & X^p_{12} & & 0 & -X^p_{N^p_n 3} & X^p_{N^p_n 2} \\ X^p_{13} & 0 & 0 & ... & X^p_{N^p_n 3} & 0 & 0 \\ -X^p_{12} & 0 & 0 & & -X^p_{N^p_n 2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{3.85}$$

Pour généraliser l'analyse de section à un ensemble d'éléments finis (totalisant N^p_{tot} noeuds), des vecteurs nodaux globaux sont définis de la même manière que dans la section 3.1.6 (cf. équation (3.36)). Soient $\boldsymbol{G}^p_g$ et $\frac{\partial \boldsymbol{G}^p_g}{\partial X^p_1}$ les vecteurs globaux (de dimension $(3N^p_{tot} \times 1)$) contenant respectivement le mouvement de gauchissement de l'ensemble des points d'un maillage éléments finis et sa dérivée. En conséquence, la définition de ces vecteurs globaux permet de généraliser la contrainte sur le gauchissement de l'équation (3.84) à un ensemble d'éléments finis en introduisant la matrice $\boldsymbol{D}^p_g$ de dimension $(6 \times 3N^p_{tot})$, construite avec une manière analogue à celle présentée dans l'équation (3.84).

Équations d'équilibre

Afin d'établir les équations d'équilibre de la section de poutre, il faut introduire les expressions discrétisées des champs de déplacement et de déformation dans l'expression du principe des travaux virtuels 3.69. Le développement détaillé dans l'Annexe 7 permet d'établir une expression matricielle du travail linéique d'un élément fini telle que :

$$\delta\mathcal{W}_{el}^{*p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}_{el}^{p}}{\partial X_1^p} \\ \delta\boldsymbol{G}_{el}^{p} \\ \delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{el}^{p} \\ \frac{\partial\boldsymbol{P}_{el}^{p}}{\partial X_1^p} \\ {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^{p} \end{pmatrix} + \delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\left(\frac{\partial{\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^{p}}{\partial X_1^p} - \boldsymbol{t}^{pT}{\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^{p}\right) - \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}_{el}^{p}}{\partial X_1^p} \\ \delta\boldsymbol{G}_{el}^{p} \\ \delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{el}^{p} & \boldsymbol{C}_{el}^{p} & \boldsymbol{L}_{el}^{p} \\ {\boldsymbol{C}_{el}^{p}}^T & \boldsymbol{E}_{el}^{p} & \boldsymbol{Q}_{el}^{p} \\ {\boldsymbol{L}_{el}^{p}}^T & {\boldsymbol{Q}_{el}^{p}}^T & \boldsymbol{A}_{el}^{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\boldsymbol{G}_{el}^{p}}{\partial X_1^p} \\ \boldsymbol{G}_{el}^{p} \\ {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

La construction des matrices élémentaires de l'équation (3.86) est détaillée dans l'Annexe 7. Pour un ensemble de N_{el}^p éléments finis, le PTV s'écrit :

$$\sum_{el=1}^{N_{el}^p} \delta\mathcal{W}_{el}^{*p} = \sum_{el=1}^{N_{el}^p} \delta\mathcal{W}_{extel}^{*p} - \delta\mathcal{W}_{intel}^{*p} = 0 \tag{3.87}$$

Pour s'affranchir de la somme sur les éléments finis, une approche similaire à celle présentée dans la section 3.1.6 est adoptée. En effet, le PTV se généralise à un ensemble d'éléments en construisant des matrices globales selon les méthodes standards d'assemblage d'éléments finis. La notation utilisée pour les matrices et vecteurs globaux est détaillée ci-dessous avec leurs dimensions.

— $\boldsymbol{M}_g^p$, $\boldsymbol{C}_g^p$, $\boldsymbol{E}_g^p$: $(3N_{tot}^p \times 3N_{tot}^p)$
— $\boldsymbol{L}_g^p$, $\boldsymbol{Q}_g^p$, $\boldsymbol{D}_g^p$: $(3N_{tot}^p \times 6)$
— $\boldsymbol{A}_g^p$: (6×6)
— $\boldsymbol{G}_g^p$, $\frac{\partial\boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p}$, $\boldsymbol{P}_g^p$, $\frac{\partial\boldsymbol{P}_g^p}{\partial X_1^p}$: $(3N_{tot}^p \times 1)$

Dans les matrices et vecteurs définis ci-dessus, seuls $\boldsymbol{G}_g^p$, $\frac{\partial\boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p}$, $\boldsymbol{P}_g^p$ et $\frac{\partial\boldsymbol{P}_g^p}{\partial X_1^p}$ dépendent de la position le long de l'axe neutre X_1^p. Le vecteur $\boldsymbol{P}_g^p$ représente les efforts nodaux dans la section discrétisée et est représentatif du champ de contraintes dans la section. Ce vecteur est obtenu comme un assemblage des contributions de chaque élément. Pour un élément, ses efforts nodaux $\boldsymbol{P}_{el}^p$ sont donnés par :

$$\boldsymbol{P}_{el}^p = \int_{S^p} {\boldsymbol{N_s}}^{pT}\boldsymbol{p}^p dS^p \tag{3.88}$$

Après définition des matrices globales, le PTV ($\delta\mathcal{W}_{ext}^{*p} - \delta\mathcal{W}_{int}^{*p} = 0$) s'écrit tel que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \delta \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \delta \boldsymbol{G}_g^p \\ \delta {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_g^p & \boldsymbol{C}_g^p & \boldsymbol{L}_g^p \\ \boldsymbol{C}_g^{pT} & \boldsymbol{E}_g^p & \boldsymbol{Q}_g^p \\ \boldsymbol{L}_g^{pT} & \boldsymbol{Q}_g^{pT} & \boldsymbol{A}_g^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \boldsymbol{G}_g^p \\ {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \end{pmatrix}}_{\text{Travail virtuel des efforts internes}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \delta \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \delta \boldsymbol{G}_g^p \\ \delta {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_g^p \\ \frac{\partial \boldsymbol{P}_g^p}{\partial X_1^p} \\ {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p \end{pmatrix}}_{\text{Travail virtuel des efforts externes}} + \underbrace{\delta {\boldsymbol{\eta}}^{pT} (\frac{\partial {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p}{\partial X_1^p} - {\boldsymbol{t}}^{pT} {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p)}_{\text{Équilibre général de la section}} = 0 \tag{3.89}$$

Résolution de l'équilibre

Afin de résoudre le système d'équations matriciel de l'équation (3.89), l'équilibre général de la section est considéré séparément du PTV (Giavotto et al. 1983). Cette approche est discutable car elle implique, entre autre, de considérer que $\delta {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}$ est indépendant de $\delta \boldsymbol{\eta}^p$, ce qui est faux au vu de leurs définitions (cf. équation (3.76) et début de la section 3.3.1). Il est possible que cette manœuvre dissimule en réalité une hypothèse sur l'amplitude du gauchissement par rapport au mouvement de corps rigide. En effet, dans les travaux de (Yu et al. 2012b), les équations sont mise en place en considérant un gauchissement très petit devant le mouvement de corps rigides.

En considérant que l'équation (3.89) est valide quelque soit le déplacement virtuel considéré, l'hypothèse de (Giavotto et al. 1983) sur la résolution de l'équilibre permet de réécrire le système matriciel de l'équation (3.89) tel que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_g^p \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{C}_g^p \boldsymbol{G}_g^p + \boldsymbol{L}_g^p {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} &= \boldsymbol{P}_g^p \\ \boldsymbol{C}_g^{pT} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{E}_g^p \boldsymbol{G}_g^p + \boldsymbol{Q}_g^p {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} &= \frac{\partial \boldsymbol{P}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \boldsymbol{L}_g^{pT} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{Q}_g^{pT} \boldsymbol{G}_g^p + \boldsymbol{A}_g^p {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} &= {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p \\ \frac{\partial {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p}{\partial X_1^p} &= {\boldsymbol{t}}^{pT} {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p \end{aligned} \tag{3.90}$$

La dérivation de la dernière équation du système ci-dessus (cf. équation (3.90)) permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^{p2}} = \boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p = \mathbf{0} \tag{3.91}$$

En dérivant la première équation du système (3.90) par rapport à la direction normale à la section, le système d'équations se réduit à trois équations différentielles linéaires données par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_g^p \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^{p2}} + (\boldsymbol{C}_g^p - \boldsymbol{C}_g^{pT}) \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{L}_g^p \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}}{\partial X_1^p} - \boldsymbol{E}_g^p \boldsymbol{G}_g^p - \boldsymbol{Q}_g^p \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{L}_g^{pT} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{Q}_g^{pT} \boldsymbol{G}_g^p + \boldsymbol{A}_g^p \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} = \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p \\ \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p} = \boldsymbol{t}^{pT} \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p \end{aligned} \tag{3.92}$$

Des équations différentielles d'équilibre (cf. équation (3.92)) de la section émergent deux solutions, une solution homogène et une solution particulière. Afin de déterminer la solution homogène, les termes de droite du système d'équations (3.92) sont considérés nuls. Cela revient à admettre qu'il n'y a pas d'efforts de section, ce qui est vrai si l'effort appliqué à l'extrémité de la poutre est défini tel que l'état de contrainte dans la section n'induit aucun moment fléchissant, tranchant et de torsion ($\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p = \mathbf{0}$). Dans le travail de (Giavotto et al. 1983), la solution homogène est qualifiée de *solution à l'extrémité* et la solution particulière est appelée *solution centrale*. Dans le cas de la solution homogène, la troisième équation du système d'équations (3.92) disparait. En considérant l'équilibre de l'ensemble des nœuds de la section discrétisée, la solution à l'extrémité s'exprime sous forme matricielle telle que :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_g^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^{p2}} \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}}{\partial X_1^{p2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_g^p - \boldsymbol{C}_g^{pT} & \boldsymbol{L}_g^p \\ \boldsymbol{L}_g^{pT} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}}{\partial X_1^p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_g^p & \boldsymbol{Q}_g^p \\ \boldsymbol{Q}_g^{pT} & \boldsymbol{A}_g^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_g^p \\ \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

Pour résoudre ce type d'équation, une solution exponentielle est admise pour $\boldsymbol{G}_g^p$ et $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$:

$$\boldsymbol{G}_g^p = \widehat{\boldsymbol{G}_g^p} e^{\lambda^p X_1^p}; \quad \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} = \widehat{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}} e^{\lambda^p X_1^p} \tag{3.94}$$

L'équation (3.92) devient alors un problème aux valeurs propres tel que :

$$(\lambda^{p2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_g^p & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \lambda^p \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_g^p - \boldsymbol{C}_g^{pT} & \boldsymbol{L}_g^p \\ \boldsymbol{L}_g^{pT} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_g^p & \boldsymbol{Q}_g^p \\ \boldsymbol{Q}_g^{pT} & \boldsymbol{A}_g^p \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{G}_g^p} \\ \widehat{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

Selon (Giavotto et al. 1983), une solution particulière de l'équation (3.92) peut être résolue en considérant une solution linéaire de la position le long de l'envergure X_1^p pour le gauchissement $\boldsymbol{G_g^p}$ et la mesure de déformation généralisée $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$. Cela permet de simplifier l'équation (3.92) en enlevant la dérivée seconde par rapport à X_1^p, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_g^p \boldsymbol{G}_g^p + \boldsymbol{Q}_g^p \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} &= (\boldsymbol{C}_g^p - \boldsymbol{C}_g^{pT}) \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{L}_g^p \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}}{\partial X_1^p} \\ \boldsymbol{Q}_g^{pT} \boldsymbol{G}_g^p + \boldsymbol{A}_g^p \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} &= \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p - \boldsymbol{L}_g^{pT} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \end{aligned} \tag{3.96}$$

La dérivée de ce système d'équations donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_g^p \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{Q}_g^p \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}}{\partial X_1^p} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}_g^{pT} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{A}_g^p \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}}{\partial X_1^p} &= \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^s} = \boldsymbol{t}^{pT} \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p \end{aligned} \tag{3.97}$$

Pour des efforts de section imposés le long de l'envergure de la poutre $\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p$, il est possible de déterminer le gauchissement de la poutre $\boldsymbol{G}_g^p$, les déformations de la section de poutre $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$ et finalement les efforts nodaux dans la section. Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes.

(J. Blasques et al. 2012) propose une méthode matricielle permettant la résolution directe des 4 équations de la solution centrale, tout en intégrant les contraintes sur le gauchissement (cf. équation (3.84)) à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Après manipulation, la solution centrale s'obtient avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_g^p & \boldsymbol{Q}_g^p & \boldsymbol{D}_g^p & \boldsymbol{C}_g^{pT} - \boldsymbol{C}_g^p & -\boldsymbol{L}_g^p & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{Q}_g^{pT} & \boldsymbol{A}_g^p & \mathbf{0} & \boldsymbol{L}_g^{pT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{D}_g^{pT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_g^p & \boldsymbol{Q}_g^p & \boldsymbol{D}_g^p \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_g^{pT} & \boldsymbol{A}^{p_g} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_g^{pT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{k}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_g^p \\ {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc} \\ {\boldsymbol{\lambda_1}}^p \\ \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \frac{\partial {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}}{\partial X_1^p} \\ {\boldsymbol{\lambda_2}}^p \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{t}^{pT} {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}} \tag{3.98}$$

Dans cette équation, ${\boldsymbol{\lambda_2}}^p$ et ${\boldsymbol{\lambda_1}}^p$ sont des vecteurs de dimension (6×1) contenant les multiplicateurs de Lagrange respectivement associés aux contraintes sur le gauchissement et sa dérivée. La résolution de l'équation (3.98) permet d'obtenir, pour un effort de section ${\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p$ imposé, le gauchissement, les déformations de section et leur dérivées ($\boldsymbol{G}_g^p$, ${\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}$, $\frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p}$ et $\frac{\partial {\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}}{\partial X_1^p}$). Ensuite, il est également possible de calculer les efforts nodaux $\boldsymbol{P}_g^p$) en utilisant la première ligne du système d'équations (3.90). Ce protocole de résolution permet, à partir des résultats obtenus avec un modèle éléments finis 1D, de prédire numériquement le champ de contraintes et de gauchissement d'une section de poutre à partir de ses efforts de section.

Matrice de Raideur de la section

Pour construire la matrice de raideur de Timoshenko, la méthode présentée dans (J. Blasques et al. 2012) consiste à *tester* la réponse de la structure pour 6 cas de chargements exhaustifs.

La méthode la plus efficace revient à faire appaitre la matrice identité de dimension (6×6), notée $\boldsymbol{I_6}$, dans l'équation (3.98). Pour ce faire, la matrice $\bar{\boldsymbol{f}}$ est définie telle que :

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{w} = \bar{\boldsymbol{f}} {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p; \quad \bar{\boldsymbol{f}} = (\mathbf{0}, \boldsymbol{I_6}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{t}^p, \mathbf{0})^T \tag{3.99}$$

D'où la relation,

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{k}^{-1} \bar{\boldsymbol{f}} {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p \tag{3.100}$$

Afin de réexprimer le travail virtuel linéique interne (cf. équation (3.89)), la matrice de passage $\boldsymbol{\mathcal{P}}^p$ est définie, permettant la définition directe du vecteur $(\frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p}^T, \boldsymbol{G}_g^{pT}, \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pcT})^T$ à partir du vecteur $\boldsymbol{w}$ (défini dans l'équation (3.98)), et donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{G}_g^p}{\partial X_1^p} \\ \boldsymbol{G}_g^p \\ \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_{3N_{tot}^p}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I_{3N_{tot}^p}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_6} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}^p} \boldsymbol{w} \tag{3.101}$$

Dans l'équation (3.101), $\boldsymbol{I_{3N_{tot}^p}}$ est une matrice identité de dimension $(3N_{tot}^p \times 3N_{tot}^p)$. La définition de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^p$ permet de réécrire la contribution des efforts internes au travail virtuel linéique (cf. équation (3.89)) telle que :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_{int}^{*p} &= (\boldsymbol{\mathcal{P}}^p \delta \boldsymbol{w})^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^p & \boldsymbol{C}^p & \boldsymbol{L}^p \\ \boldsymbol{C}^{pT} & \boldsymbol{E}^p & \boldsymbol{Q}^p \\ \boldsymbol{L}^{pT} & \boldsymbol{Q}^{pT} & \boldsymbol{A}^p \end{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{P}}^p \delta \boldsymbol{w} \\ &= \delta {\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{s}}}^{pT} \bar{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{k}^{-T} \boldsymbol{\mathcal{P}}^{pT} \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^p & \boldsymbol{C}^p & \boldsymbol{L}^p \\ \boldsymbol{C}^{pT} & \boldsymbol{E}^p & \boldsymbol{Q}^p \\ \boldsymbol{L}^{pT} & \boldsymbol{Q}^{pT} & \boldsymbol{A}^p \end{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{P}}^p \boldsymbol{k}^{-1} \bar{\boldsymbol{f}} {\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{s}}}^p \end{aligned} \tag{3.102}$$

Les hypothèses réalisées pour dériver l'équilibre de la section induisent une variation du travail virtuel interne linéique de la forme $\delta {\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{s}}}^{pT} \boldsymbol{S^{cs}} {\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{s}}}^p$, où $\boldsymbol{S^{cs}}$ est la matrice de souplesse équivalente de la section. Dans ces considérations, la matrice de souplesse s'identifie à partir de l'équation (3.102) telle que :

$$\boldsymbol{S^{cs}} = \boldsymbol{K^{cs}}^{-1} = \bar{\boldsymbol{f}}^T \boldsymbol{k}^{-T} \boldsymbol{\mathcal{P}}^{pT} \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^p & \boldsymbol{C}^p & \boldsymbol{L}^p \\ \boldsymbol{C}^{pT} & \boldsymbol{E}^p & \boldsymbol{Q}^p \\ \boldsymbol{L}^{pT} & \boldsymbol{Q}^{pT} & \boldsymbol{A}^p \end{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{P}}^p \boldsymbol{k}^{-1} \bar{\boldsymbol{f}} \tag{3.103}$$

Matrice de masse de la section

L'expression de la matrice de masse d'une section de poutre s'obtient en exprimant le travail virtuel des efforts inertiels en considérant que la section adopte un mouvement rigide. Dans ces conditions, le champ de déplacement est $\boldsymbol{V}^p$ dont l'expression est donnée

dans l'équation (3.70). En reprenant l'expression du travail virtuel inertiel et la définition de la masse volumique dans la configuration de référence ρ_0, respectivement données dans les équations 39 et 5, l'expression du travail virtuel inertiel d'une poutre $\delta\mathcal{W}^{cin^p}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{cin^p} &= \int_{V^p} \rho_0 \delta \boldsymbol{V}^p \cdot \ddot{\boldsymbol{V}}^p dV^p \\
&= \int_{V^p} \rho_0 \delta \boldsymbol{\eta}^{pT} \boldsymbol{Z}^{pT} \boldsymbol{Z}^p \ddot{\boldsymbol{\eta}}^p dV^p \\
&= \int_{L_0^p} \delta \boldsymbol{\eta}^{pT} (\int_S \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 & \rho_0 X_3^p & -\rho_0 X_2^p \\ 0 & \rho_0 & 0 & -\rho_0 X_3^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 & \rho_0 X_2^p & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_0 X_3^p & \rho_0 X_2^p & \rho_0 (X_2^{p2} + X_3^{p2}) & 0 & 0 \\ \rho_0 X_3^p & 0 & 0 & 0 & \rho_0 X_3^{p2} & -\rho_0 X_2^p X_3^p \\ -\rho_0 X_2^p & 0 & 0 & 0 & -\rho_0 X_2^p X_3^p & \rho_0 X_2^{p2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{M^{cs}}} dX_2^p dX_3^p) \ddot{\boldsymbol{\eta}}^p dX_1^p
\end{aligned} \tag{3.104}$$

L'équation (3.104) fait apparaitre la matrice de masse de la section $\boldsymbol{M^{cs}}$, dépendant des propriétés géométriques et massiques de la section. Son expression, retrouvable dans (Hodges 2006), peut se réécrire telle que :

$$\boldsymbol{M^{cs}} = \begin{pmatrix} m^p & 0 & 0 & 0 & m^p X_3^{mass} & -m^p X_2^{mass} \\ 0 & m^p & 0 & -m^p X_3^{mass} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^p & m^p X_2^{mass} & 0 & 0 \\ 0 & -m^p X_3^{mass} & m^p X_2^{mass} & I_{22}^p + I_{33}^p & 0 & 0 \\ m^p X_3^{mass} & 0 & 0 & 0 & I_{22}^p & -I_{23}^p \\ -m^p X_2^{mass} & 0 & 0 & 0 & -I_{23}^p & I_{33}^p \end{pmatrix} \tag{3.105}$$

La signification des termes de cette matrice est donnée ci-dessous, où ρ_0 est la masse volumique :

— m^p : masse linéique de la poutre associée à la section.

$$m^p = \int_{S^p} \rho_0 dS^p \tag{3.106}$$

— I^p_{22},I^p_{33} et I^p_{23} : moment d'inertie de la section.

$$I^p_{22} = \int_{S^p} \rho_0 {X^p_3}^2 dS^p; \quad I^p_{33} \quad = \int_{S^p} \rho_0 {X^p_2}^2 dS^p; \quad I^p_{23} = \int_{S^p} \rho_0 X^p_2 X^p_3 dS^p \tag{3.107}$$

— X^{mass}_2 et X^{mass}_3 : coordonnées du centre de masse de la section, calculée

$$X^{mass}_2 = \frac{1}{m^p} \int_{S^p} \rho_0 X^p_2 dS^p; \quad X^{mass}_3 = \frac{1}{m^p} \int_{S^p} \rho_0 X^p_3 dS^p \tag{3.108}$$

Pour évaluer numériquement cette matrice, il suffit de remplacer l'intégrale sur la surface par une somme sur l'ensemble des éléments du maillage, tous caractérisés par une surface, une masse volumique et une position (celle de leur centre). Dans la suite du manuscrit, il est expliqué comment les matrices de raideur et de masse de la section sont utilisées pour définir un élément fini de type poutre capable de modéliser des phénomènes anisotropes tel que le couplage flexion-torsion.

3.3.2 Modèle de poutre

Cette section présente un modèle numérique prédisant le comportement d'une poutre composite, initialement droite et sans vrillage, caractérisée par des propriétés équivalentes de raideurs (cf. équation (3.54)) et d'inertie (cf. équation (3.105)). Ce modèle est qualifié de *géométriquement exacte* car, la rotation des sections de la poutre est résolue exactement contrairement au modèle d'analyse de sections où la rotation d'une section est simplifiée dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Le modèle de poutre retenu est celui de Timoshenko, où l'effet du cisaillement transverse n'est pas négligé. Les sections de la poutre sont considérées rigides dans les développements avec cependant, une prédiction du gauchissement une fois la poutre déformée à partir des résultats de l'analyse de sections (plus particulièrement ses fonctions de gauchissement). Les développements présentés dans cette section 3.3.2 sont basés sur les travaux de (Mäkinen et al. 2008)

Cinématique

La figure 3.12 illustre la configuration initiale et déformée d'une poutre initialement droite et non vrillée. Contrairement à la cinématique d'un solide tridimensionnel (cf. figure 3.1), la modélisation d'une poutre nécessite la définition de deux repères $E^p = (\boldsymbol{E_1}^p, \boldsymbol{E_2}^p, \boldsymbol{E_3}^p)$ et $e^p = (\boldsymbol{e_1}^p, \boldsymbol{e_2}^p, \boldsymbol{e_3}^p)$, respectivement associés à la configuration initiale et déformée de la ligne centrale de la poutre. Le repère E^p est le même repère que celui

retenu pour l'analyse de section, où la direction X_1 est alignée avec l'axe de la poutre (lui même perpendiculaire à la section). De plus, les variables L_0^p et L^p représentent respectivement la longueur initiale et courante d'un élément poutre.

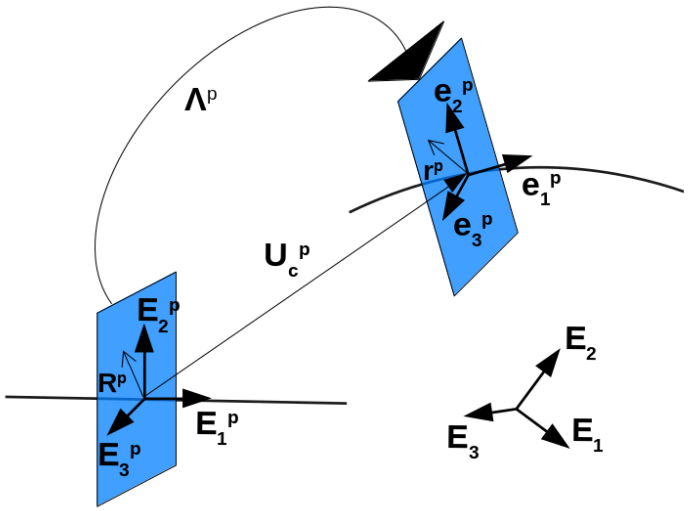


FIGURE 3.12 – Illustration de la configuration initiale et déformée d'une poutre.

En considérant une section de poutre rigide, le champ de déplacement dans la poutre s'exprime comme la somme d'une composante de translation et de rotation. La translation d'un point de l'axe central de poutre exprimé dans la base initiale E^p est noté $\boldsymbol{U_c}^p = (U_{c1}^p, U_{c2}^p, U_{c3}^p)^T$ et la rotation de la section est modélisée par une matrice $\boldsymbol{\Lambda}^p$, fonction de trois paramètres regroupés dans le vecteur rotation $\boldsymbol{\phi_c}^p = (\phi_{c1}^p, \phi_{c2}^p, \phi_{c3}^p)^T$, exprimé dans la configuration non-déformée. L'expression de la position d'un point dans la configuration initiale et déformée est donnée dans l'équation (3.109). Le vecteur de déplacement généralisé de la poutre, noté $\boldsymbol{\eta}^p$ est construit tel que $\boldsymbol{\eta}^p = (\boldsymbol{U_c}^{pT}, \boldsymbol{\phi_c}^{pT})^T$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^p &= \overbrace{X_1^p \boldsymbol{E_1}^p}^{\boldsymbol{X}_0^p} \overbrace{X_2^p \boldsymbol{E_2}^p + X_3^p \boldsymbol{E_3}^p}^{\boldsymbol{R}^p} \\ \boldsymbol{x}^p &= \underbrace{\boldsymbol{X}_0^p + \boldsymbol{U_c}^p}_{\boldsymbol{x}_0^p = x_1^p \boldsymbol{e_1}^p} \underbrace{X_2^p \boldsymbol{e_2}^p + X_3^p \boldsymbol{e_3}^p}_{\boldsymbol{r}^p = \boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{R}^p} \end{aligned} \tag{3.109}$$

Dans l'équation (3.109), la matrice de rotation $\boldsymbol{\Lambda}^p$ est obtenue à partir de la formule de Rodrigues, explicitée dans l'équation (3.110). Dans cette équation, ϕ_c^p et $\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p$ représentent respectivement la norme et la matrice antisymétrique associées au vecteur $\boldsymbol{\phi_c}^p$.

Dans la suite des développements, le symbole $\tilde{\bullet}$ représente systématiquement la forme antisymétrique d'un vecteur.

$$\boldsymbol{\Lambda}^p = \boldsymbol{I_3} + \frac{sin(\phi_c^p)}{\phi_c^p}\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p + \frac{1-cos(\phi_c^p)}{\phi_c^{p2}}\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p; \quad \tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p = \begin{pmatrix} 0 & -\phi_{c3}^p & \phi_{c2}^p \\ \phi_{c3}^p & 0 & -\phi_{c1}^p \\ -\phi_{c2}^p & \phi_{c1}^p & 0 \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

Les propriétés des rotations définies avec la matrice de Rodrigues sont explicitées dans les travaux de (Ibrahimbegovic et al. 1995 ; Mäkinen et al. 2008). Les propriétés à retenir pour les développements sont listées dans ce qui suit. Pour commencer, cette matrice possède les propriétés usuelles d'une matrice de rotation, c'est à dire :

$$\boldsymbol{\Lambda}^{p-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{pT}; \quad \boldsymbol{\Lambda}^p\boldsymbol{\Lambda}^{pT} = \boldsymbol{I_3}; \quad det(\boldsymbol{\Lambda}^p) = 1 \tag{3.111}$$

Ensuite, la dérivée de la matrice $\boldsymbol{\Lambda}^p$ par rapport à la direction longitudinale X_1^p de la poutre est donnée par :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p\boldsymbol{\Lambda}^p; \boldsymbol{\kappa}^p = \boldsymbol{T}^{\Lambda p}\frac{\partial \boldsymbol{\phi_c}^p}{\partial X_1^p} \tag{3.112}$$

Avec,

$$\boldsymbol{T}^{\Lambda p} = \boldsymbol{I_3} + \frac{1-cos(\phi_c^p)}{\phi_c^{p2}}\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p + \frac{\phi_c^p - sin(\phi_c^p)}{\phi_c^{p3}}\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p; \quad \boldsymbol{T}^{\Lambda pT} = \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{T}^{\Lambda p} \tag{3.113}$$

Dans la suite des développements où l'expression du gradient de transformation est explicitée, on montre que le vecteur $\boldsymbol{\kappa}^p$ de l'équation (3.112) représente la courbure de la poutre, exprimée dans la configuration déformée de la poutre. Pour la suite des développements, il est utile de donner l'expression de la dérivée de $\boldsymbol{T}^{\Lambda p}$ par rapport à la direction longitudinale de la poutre, telle que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^{\Lambda p}}{\partial X_1^p} = \frac{1-cos(\phi_c^p)}{\phi_c^{p2}}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p}{\partial X_1^p} + \frac{\phi_c^p - sin(\phi_c^p)}{\phi_c^{p3}}(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p}{\partial X_1^p}\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p + \tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p}{\partial X_1^p}) + \frac{\phi_c^p sin(\phi_c^p) - 2 + 2cos(\phi_c^p)}{\phi_c^{p4}}(\boldsymbol{\phi_c}^p \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi_c}^p}{\partial X_1^p})\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p + \frac{3sin(\phi_c^p) - 2\phi_c^p - \phi_c^p cos(\phi_c^p)}{\phi_c^{p5}}(\boldsymbol{\phi_c}^p \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi_c}^p}{\partial X_1^p})\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p\tilde{\boldsymbol{\phi_c}}^p \tag{3.114}$$

L'expression d'une rotation incrémentale (indispensable pour établir les expressions des différentes variations virtuelles) est plus complexe que dans la section 3.3.1 où l'approximation des petits angles étaient réalisée. Un état de rotation est caractérisé par le vecteur $\boldsymbol{\phi_c}^p$. Pour exprimer les variations virtuelles des différentes quantités, il faut considérer l'état de rotation caractérisé par $\boldsymbol{\phi_c}^p + \delta\boldsymbol{\phi_c}^p$. Pour atteindre cet état de rotation à partir d'une structure initiallement tournée avec $\boldsymbol{\phi_c}^p$, on ne peut pas directement appliquer la rotation $\delta\boldsymbol{\phi_c}^p$ à la structure tournée car ses axes locaux ont été mis à jour. $\delta\boldsymbol{\theta_e}^p$ est alors défini comme la rotation incrémentale permettant de passer de l'état de rotation caractérisé par $\boldsymbol{\phi_c}^p$ à l'état de rotation caractérisé par $\boldsymbol{\phi_c}^p + \delta\boldsymbol{\phi_c}^p$. Cette composition des rotations est illustrée dans la figure 3.13.

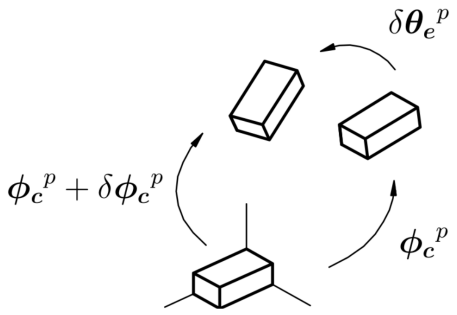


FIGURE 3.13 – Illustration du concept de rotation incrémentale, adaptée de (KRENK 2009).

La relation entre les vecteurs rotations incrémentales $\delta\boldsymbol{\theta_e}^p$ et $\delta\boldsymbol{\phi_c}^p$ est donnée par :

$$\delta\boldsymbol{\theta_e}^p = \boldsymbol{T}^{\Lambda p}\delta\boldsymbol{\varphi_c}^p = \boldsymbol{T}^{\Lambda p}\delta\boldsymbol{\phi_c}^p \tag{3.115}$$

Finalement, la variation virtuelle de la matrice de rotation induite par une variation

virtuelle $\delta\boldsymbol{\phi_c}^p$ (ou $\delta\boldsymbol{\varphi_c}^p$) est donnée par :

$$\delta\boldsymbol{\Lambda}^p = \boldsymbol{\Lambda}^p \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{E}}{}^p = \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{e}}{}^p \boldsymbol{\Lambda}^p \tag{3.116}$$

Mesure de déformations

Les équations d'équilibre de la poutre sont développées à partir du PTV exprimé avec le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff (cf. équation (40)), il est donc pertinent d'exprimer le tenseur du gradient de transformation $\boldsymbol{F}^p$. En reprenant la définition de l'équation (3.2), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^p &= \frac{\partial \boldsymbol{x}^p}{\partial \boldsymbol{X}^p} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{x}^p}{\partial X_i^p} \otimes \boldsymbol{E_i^p} \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}(X_2^p \boldsymbol{E_2}^p + X_3^p \boldsymbol{E_3}^p)\right) \otimes \boldsymbol{E_1}^p + \boldsymbol{e_2}^p \otimes \boldsymbol{E_2}^p + \boldsymbol{e_3}^p \otimes \boldsymbol{E_3}^p \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p(X_2^p \boldsymbol{e_2}^p + X_3^p \boldsymbol{e_3}^p)\right) \otimes \boldsymbol{E_1}^p + \boldsymbol{e_2}^p \otimes \boldsymbol{E_2}^p + \boldsymbol{e_3}^p \otimes \boldsymbol{E_3}^p
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Or, si E^p est une base standard, les bases courante et initiale sont reliées à la matrice de rotation $\boldsymbol{\Lambda}^p$ par :

$$\boldsymbol{\Lambda}^p = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e_i}^p \otimes \boldsymbol{E_i}^p \tag{3.118}$$

En ajoutant et soustrayant $\boldsymbol{e_1}^p \otimes \boldsymbol{E_1}^p$ dans l'équation (3.117), l'expression du gradient de transformation devient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^p &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p(X_2^p \boldsymbol{e_2}^p + X_3^p \boldsymbol{e_3}^p)\right) \otimes \boldsymbol{E_1}^p - \boldsymbol{e_1}^p \otimes \boldsymbol{E_1}^p + \boldsymbol{e_1}^p \otimes \boldsymbol{E_1}^p + \boldsymbol{e_2}^p \otimes \boldsymbol{E_2}^p + \boldsymbol{e_3}^p \otimes \boldsymbol{E_3}^p \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} - \boldsymbol{e_1}^p \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p(X_2^p \boldsymbol{e_2}^p + X_3^p \boldsymbol{e_3}^p)\right) \otimes \boldsymbol{E_1}^p + \boldsymbol{\Lambda}^p
\end{aligned} \tag{3.119}$$

En factorisant l'équation (3.119) par la matrice de rotation $\boldsymbol{\Lambda}^p$, l'expression du gradient de transformation devient alors :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^p &= \boldsymbol{\Lambda}^p(\boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{\Lambda}^{pT}(\overbrace{\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1}}^{\boldsymbol{\gamma}^p} - \boldsymbol{e_1}^p) + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p(X_2^p\boldsymbol{e_2}^p + X_3^p\boldsymbol{e_3}^p)) \otimes \boldsymbol{E_1}^p) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^p(\boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\gamma}^p + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p\boldsymbol{r}^p) \otimes \boldsymbol{E_1}^p) \qquad (3.120) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^p(\boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{\Gamma}^p + \boldsymbol{\mathcal{K}}^p\boldsymbol{r}^p) \otimes \boldsymbol{E_1}^p) \qquad (3.121)
\end{aligned}
$$

Dans l'équation (3.120), les mesures de déformations d'un élément poutre sont introduites. Les déformations généralisées translationnelles (élongation et cisaillement) et rotationnelles (vrillage et courbure) sont décrites respectivement par $\boldsymbol{\gamma}^p$ et $\boldsymbol{\kappa}^p$ dans la base courante de la poutre (e^p). Leurs contreparties dans le repère matériel (E^p) sont notées $\boldsymbol{\Gamma}^p$ et $\boldsymbol{\mathcal{K}}^p$ et obtenues à l'aide de l'inverse de la matrice de passage $\boldsymbol{\Lambda}^{pT}$ (cf. équations 3.111 et 3.112). Les expressions de ces mesures de déformations sont détaillées dans l'équation (3.122) :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}^p &= \frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} - \boldsymbol{e_1}^p; & \boldsymbol{\kappa}^p &= \boldsymbol{T}^{\Lambda p}\frac{\partial \boldsymbol{\phi_c}^p}{\partial X_1^p} \\
\boldsymbol{\Gamma}^p &= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\gamma}^p = \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} - \boldsymbol{E_1}^p; & \boldsymbol{\mathcal{K}}^p &= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\kappa}^p = \boldsymbol{T}^{\Lambda pT}\frac{\partial \boldsymbol{\phi_c}^p}{\partial X_1^p} \qquad (3.122)
\end{aligned}
$$

Les vecteurs de déformations généralisées dans le repère courant et matériel, notées respectivement $\boldsymbol{\varepsilon_v}^{pc}$ et $\boldsymbol{\epsilon_v}^{pc}$, sont construits en assemblant les mesures de déformations translationnelles et rotationnelles tel que :

$$
\boldsymbol{\varepsilon_v}^{pc} = (\boldsymbol{\gamma}^{pT}, \boldsymbol{\kappa}^{pT})^T; \quad \boldsymbol{\epsilon_v}^{pc} = (\boldsymbol{\Gamma}^{pT}, \boldsymbol{\mathcal{K}}^{pT})^T \qquad (3.123)
$$

Afin de faire apparaitre les déformations dans le repère matériel dans l'expression du gradient de transformation, le terme $\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{r}^p$ est réécrit tel que :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p\boldsymbol{r}^p &= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}(\boldsymbol{\kappa}^p \times \boldsymbol{r}^p) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\kappa}^p \times \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{r}^p \qquad (\boldsymbol{Aa} \times \boldsymbol{Ab} = det(A)\boldsymbol{A}^{-T}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})) \\
&= \boldsymbol{\mathcal{K}}^p \times \boldsymbol{R}^p \qquad (3.124)
\end{aligned}
$$

Le gradient de transformation peut alors se réécrire tel que $\boldsymbol{\mathcal{K}}^p$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^p &= \boldsymbol{\Lambda}^p(\overbrace{\boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{\Gamma}^p + \boldsymbol{\mathcal{K}}^p \times \boldsymbol{R}^p) \otimes \boldsymbol{E_1}^p}^{\substack{\text{Gradient de transformation} \\ \text{dans le repère } E^p}}) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{F}^p_m \end{aligned} \tag{3.125}$$

Variation virtuelle des quantités cinématiques

Afin d'obtenir une expression de la variation virtuelle du tenseur du gradient de transformation, il faut d'abord exprimer le déplacement virtuel et les variations virtuelles des mesures de déformation de la poutre. Le déplacement $\boldsymbol{u}^p$ est obtenu comme la différence de la position initiale et courante (formulées dans l'équation (3.109)) :

$$\boldsymbol{u}^p = \boldsymbol{x}^p - \boldsymbol{X}^p = \boldsymbol{U_c}^p + \boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{R}^p - \boldsymbol{R}^p \tag{3.126}$$

Sa variation virtuelle est donnée par :

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{u}^p &= \delta\boldsymbol{U_c}^p + \delta(\boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{R}^p) \\ &= \delta\boldsymbol{U_c}^p + \delta\boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{R}^p \\ &= \delta\boldsymbol{U_c}^p + \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p \boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{R}^p \\ &= \delta\boldsymbol{U_c}^p + \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p \boldsymbol{r}^p \end{aligned} \tag{3.127}$$

Pour la suite, il est pertinent de définir la variation virtuelle du vecteur de déplacement généralisé $\delta\boldsymbol{\eta}^p$, construit en considérant la rotation incrémentale $\delta{\boldsymbol{\theta}_e}^p$, telle que :

$$\delta\boldsymbol{\eta}^p = (\delta{\boldsymbol{U_c}}^{pT}, \delta{\boldsymbol{\theta}_e}^{pT})^T \tag{3.128}$$

L'expression des variations virtuelles des mesures de déformations généralisées sont développées dans l'Annexe 8, les formes matricielles de ces variations sont exprimées telles que :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon_{ve}}^{pc} = \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\gamma}^p\\ \delta\boldsymbol{\kappa}^p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X_1} & \tilde{\boldsymbol{e_1}^p}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1^p} - \tilde{\boldsymbol{\kappa}^p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{U_c}^p\\ \delta\boldsymbol{\theta_e}^p\end{pmatrix} \tag{3.129}$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon_{ve}}^{pc} = \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\Gamma}^p\\ \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial}{\partial X_1^p} & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{x}_0^p}}{\partial X_1}\\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial}{\partial X_1^p}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{S}^p}\delta\boldsymbol{\eta}^p \tag{3.130}$$

L'expression de la variation virtuelle du gradient de déformation dans le repère matériel s'obtient directement à partir de l'équation (3.125) :

$$\delta\boldsymbol{F}_m^p = (\delta\boldsymbol{\Gamma}^p + \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \times \boldsymbol{R}^p) \otimes \boldsymbol{E_1}^p \tag{3.131}$$

Travaux virtuels

Dans ce qui suit, les expressions des contributions au travail virtuel dans la configuration non-déformée sont détaillées. Le travail virtuel des efforts internes est exprimé à l'aide du premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff(notée $\boldsymbol{P}^p$) et du gradient de transformation exprimée dans la configuration non déformée ($\boldsymbol{F}_m^p$ 3.131) :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}^{int} &= \int_{V^p}\boldsymbol{P}^p : \delta\boldsymbol{F}_m^p dV^p = \int_{V^p}\boldsymbol{P}^p : ((\delta\boldsymbol{\Gamma}^p + \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \times \boldsymbol{R}^p) \otimes \boldsymbol{E_1}^p)dV^p\\ &= \int_{V^p}\boldsymbol{P}^p\boldsymbol{E_1}^p \cdot (\delta\boldsymbol{\Gamma}^p + \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \times \boldsymbol{R}^p)dV^p; \quad \boldsymbol{A} : (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{3.132}$$

Afin de simplifier l'équation (3.132), il est pertinent de noter que le produit $\boldsymbol{P}^p\boldsymbol{E_1}^p$ est la première colonne du tenseur $\boldsymbol{P}^p$, telle que $\boldsymbol{P}_1^p = \boldsymbol{P}^p\boldsymbol{E_1}^p = (P_{11}^p, P_{21}^p, P_{31}^p)^T$. L'équation (3.132) devient alors :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}^{int} &= \int_{V^p}\boldsymbol{P}_1^p \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma}^p + \boldsymbol{P}_1^p \cdot \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \times \boldsymbol{R}^p dV^p\\ &= \int_{V^p}\boldsymbol{P}_1^p \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma}^p + \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \cdot \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{P}_1^p dV^p\end{aligned} \tag{3.133}$$

Les mesures de déformations dépendent uniquement de la position le long de la ligne

centrale de la poutre, ce qui permet de séparer l'intégrale volumique en une intégrale linéique et une intégrale surfacique telles que :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}^{int^p} &= \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\Gamma}^p \cdot \Big(\int_{S^p} \boldsymbol{P}_1^p dX_2^p dX_3^p\Big) dX_1^p + \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \cdot \Big(\int_{S^p} \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{P}_1^p dX_2^p dX_3^p\Big) dX_1^p \\ &= \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\Gamma}^p \cdot \Big(\int_{S^p} \begin{pmatrix} P_{11}^p \\ P_{21}^p \\ P_{31}^p \end{pmatrix} dX_2^p dX_3^p\Big) dX_1^p \\ &+ \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p \cdot \Big(\int_{S^p} \begin{pmatrix} X_2^p P_{31}^p - X_3^p P_{21}^p \\ X_3^p P_{11}^p \\ -X_2^p P_{11}^p \end{pmatrix} dX_2^p dX_3^p\Big) dX_1^p \end{aligned} \tag{3.134}$$

Les intégrales surfaciques de l'équation (3.134) correspondent à la définition des efforts de section de l'équation (3.56), à la différence que dans l'équation (3.56), les contraintes sont exprimées avec le tenseur de Cauchy, qui est équivalent au premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff dans l'approximation des petites déformations. Il est alors possible de réécrire l'équation (3.134) comme le produit scalaire des efforts de sections et des déformations généralisées de la poutre :

$$\delta\mathcal{W}^{int^p} = \int_{L_0^p} \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p \cdot \delta\boldsymbol{\epsilon_{ve}}^{pc} dX_1^p = \int_{L_0^p} \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p \cdot \boldsymbol{S}^p \delta\boldsymbol{\eta}^p dX_1^p = \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\eta}^{pT} \boldsymbol{S}^{pT} \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p dX_1^p \tag{3.135}$$

La contribution des efforts externes au travail virtuel est plus simple à dériver car dans le cadre de cette thèse, les chargements définis sur les éléments poutres sont constants. En effet, pour reproduire les essais en air (cf. section 2.2), le poids du foil et de la masse suspendue sont modélisés comme des forces ponctuelles non-suiveuses ne dépendant pas de la déformation du foil (cf. section 3.3.3). De la même manière, pour reproduire les essais en bassins (cf. section 2.2), les efforts fluides sont *projetés* sur la ligne centrale de la poutre et considérés constants pendant l'analyse par éléments finis. La procédure de projection des efforts est détaillée dans la section 3.4.2. La contribution des efforts externes au travail virtuel s'exprime telle que :

$$\delta\mathcal{W}^{ext^p} = \int_{V^p} J^p \delta\boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{f}^p dV^p = \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\eta}^{pT} \boldsymbol{f_{ext}}^p dX_1^p \tag{3.136}$$

Le développement de la contribution des efforts inertiels au travail virtuel en considérant le champ de déplacement non-approximé (cf. équation (3.109)) est complexe et n'est donc pas détaillé dans ce manuscrit car les analyses par éléments finis réalisées sont statiques. Cependant, le travail virtuel des efforts inertiels permet d'obtenir une matrice de masse indispensable pour l'analyse des modes propres de la structure. Pour ce type d'analyse où la structure est étudiée autour d'un point équilibre, la rotation rigide de la section peut être approximée de la même manière que dans la section 3.3.1 (cf. équation (3.70)). Dans ces considérations, l'expression du travail virtuel des efforts inertiels $\delta\mathcal{W}^{cin^p}$ est celle développée dans la section 3.3.1 où la notion de matrice de masse de la section $\boldsymbol{M^{cs}}$ est introduite (cf. équation (3.104)).

$$\delta\mathcal{W}^{cin^p} = \int_{L_0^p} \delta\boldsymbol{\eta}^{pT} \boldsymbol{M^{cs}} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^p dX_1^p \tag{3.137}$$

Discrétisation

L'élément poutre présenté ici est linéaire, cela signifie que ses fonctions de forme sont linéaires. Le déplacement d'un point de la poutre est interpolé à partir des déplacements nodaux de ses deux nœuds tel que :

$$\boldsymbol{\eta}^p = \boldsymbol{\eta}_1^p N_1^p + \boldsymbol{\eta}_2^p N_2^p; \quad \boldsymbol{\eta}_1^p = (\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{c}1}^{p\,T}, \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{c}1}^{p\,T})^T \tag{3.138}$$

Les déplacements nodaux sont rassemblés dans le vecteur des déplacements nodaux généralisés $\boldsymbol{\eta}_{el}^p = (\boldsymbol{\eta}_1^{pT}, \boldsymbol{\eta}_2^{pT})^T$. D'après l'équation (3.115) La variation virtuelle de ce vecteur est donnée par :

$$\delta\boldsymbol{\eta}_{el}^p = (\delta\boldsymbol{\eta}_1^{pT}, \delta\boldsymbol{\eta}_2^{pT})^T; \quad \delta\boldsymbol{\eta}_1^p = (\delta\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{c}1}^{p\,T}, \delta\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{c}1}^{p\,T})^T \tag{3.139}$$

Les fonctions de forme N_1^p et N_2^p apparaissant dans l'équation (3.138) s'expriment dans le repère réduit de la poutre telles que :

$$N_1^p = (1 - \xi^p); \quad N_2^p = \xi^p \tag{3.140}$$

Dans l'équation (3.140), la variable ξ^p, variant entre 0 et 1, représente la distance adimensionnel d'un point de la poutre par rapport à son premier noeud. La matrice d'interpolation de l'élément poutre est ensuite définie comme $\boldsymbol{N}^p = (N_1^p \boldsymbol{I_6}, N_2^p \boldsymbol{I_6})$ telle que $\boldsymbol{\eta}^p = \boldsymbol{N}^p \boldsymbol{\eta}_{el}^p$ (et $\delta\boldsymbol{\eta}^p = \boldsymbol{N}^p \delta\boldsymbol{\eta}_{el}^p$). Il est maintenant possible de réécrire les versions discrètes des contributions des éléments au travail virtuel tel que :

$$\delta\mathcal{W}_{el}^{int} = \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T \int_{L_0^p} \boldsymbol{N}^{pT} \boldsymbol{S}^{pT} {\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^p dX_1^p \qquad = \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T \boldsymbol{f}_{int_{el}}^p \tag{3.141}$$

$$\delta\mathcal{W}_{el}^{ext} = \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T \int_{L_0^p} \boldsymbol{N}^{pT} \boldsymbol{f}_{ext}^p dX_1^p \qquad = \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T \boldsymbol{f}_{ext_{el}}^p \tag{3.142}$$

$$\delta\mathcal{W}_{el}^{cin} = \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T \int_{L_0^p} \boldsymbol{N}^{pT} \boldsymbol{M^{cs}} \boldsymbol{N}^p dX_1^p \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{el}^p \qquad = \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T \boldsymbol{M}_{el}^p \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{el}^p \tag{3.143}$$

Dans les équations ci-dessus, L_0^p représente la longueur initiale de l'élément poutre considéré. Le PTV pour un problème statique avec N_{el}^p éléments poutres stipule que :

$$\delta\mathcal{W} = \sum_{el=1}^{N_{el}^p} \delta\mathcal{W}_{el}^{ext} - \delta\mathcal{W}_{el}^{int} = \sum_{el=1}^{N_{el}} \delta{\boldsymbol{\eta}_{el}^p}^T (\boldsymbol{f}_{int_{el}}^p - \boldsymbol{f}_{ext_{el}}^p) = 0 \quad \forall\delta\boldsymbol{\eta}_{el}^p \tag{3.144}$$

De la même manière que dans la section 3.1.6, la définition de vecteurs nodaux globaux permet de s'affranchir de la somme sur les éléments. Il y a cependant une différence avec les éléments finis 3D, les déplacements nodaux $\boldsymbol{\eta}_{el}^p$ sont exprimés dans le repère local de la poutre, où celle-ci est alignée avec les axes E_1^p, E_2^p et E_3^p. Afin de les exprimer de manière générale, une matrice de passage est définie à partir des vecteurs unitaires de la poutre exprimés dans le repère global $E = (\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3})$ (cf. figure 3.12), telle que :

$$(\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}) = \boldsymbol{R_{lg}}^p ({\boldsymbol{E_1}}^p, {\boldsymbol{E_2}}^p, {\boldsymbol{E_3}}^p); \quad \boldsymbol{\mathcal{R}_{lg}}^p = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{lg}}^p & \\ & \boldsymbol{R_{lg}}^p \end{pmatrix} \tag{3.145}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\eta}^{pg}$, $\boldsymbol{f}_{ext}^{pg}$ et $\boldsymbol{f}_{int}^{pg}$ sont alors construits, pour un ensemble de N_n^p nœuds, tels que :

$$\boldsymbol{\eta}^{pg} = (({\boldsymbol{\mathcal{R}_{lg}}^{pT}} \boldsymbol{\eta}_1^p)^T, (\underbrace{{\boldsymbol{\mathcal{R}_{lg}}^{pT}} \boldsymbol{\eta}_2^p}_{\boldsymbol{\eta}_2^{pg}})^T, ..., ({\boldsymbol{\mathcal{R}_{lg}}^{pT}} \boldsymbol{\eta}_{N_n^p}^p)^T)^T \tag{3.146}$$

En pratique, une matrice de passage $\boldsymbol{\mathcal{R}_{lg}}^p$ est construit pour chacun des éléments poutres. L'équation (3.146) permet d'obtenir,

$$\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{W}^{ext} - \delta\mathcal{W}^{int} = \delta\boldsymbol{\eta}^{pgT}(\boldsymbol{f}_{int}^{pg} - \boldsymbol{f}_{ext}^{pg}) = 0 \quad \forall\delta\boldsymbol{\eta}^{pg} \tag{3.147}$$

où les résidus sont définis par :

$$\boldsymbol{r}^{pg} = \boldsymbol{f}_{int}^{pg} - \boldsymbol{f}_{ext}^{pg} \tag{3.148}$$

La résolution de l'équation (3.147) repose sur l'hypothèse simplificatrice $\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p = \boldsymbol{K^{cs}}{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}$, où $\boldsymbol{K^{cs}}$ est donnée par l'équation (3.103). Cette hypothèse semble fournir de bon résultats comparativement à la formulation utilisée dans Abaqus$^{\text{TM}}$, ce qui est montré par les résultats présentés dans la section 6.2. L'obtention de la matrice de raideur tangente s'obtient en différenciant l'expression des efforts nodaux globaux par rapport à un déplacement nodal $d\boldsymbol{\eta}^{pg}$ (cf. équation (3.42)). Ici, seule la différenciation des efforts internes est non nulle car les efforts externes nodaux sont imposés constants.

$$\boldsymbol{K}_{tan}^{pg} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{pg}}{\partial \boldsymbol{\eta}^{pg}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{int}^{pg}}{\partial \boldsymbol{\eta}^{pg}} \tag{3.149}$$

Matrice de raideur tangente

Le développement de la matrice de raideur tangente est réalisé pour un élément, puis est ensuite généralisé à un ensemble de poutres. La différentielle des efforts internes nodaux pour un élément est donnée par :

$$d\boldsymbol{f}_{int_{el}}^{p} = \underbrace{\int_{L_0^p} \boldsymbol{N}^{pT}\boldsymbol{S}^{pT}d{\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^{p}dX_1^p}_{d\boldsymbol{f}_{mat_{el}}^{p}} + \underbrace{\int_{L_0^p} d(\boldsymbol{N}^{pT}\boldsymbol{S}^{pT}){\boldsymbol{\mathcal{F}_s}}^{p}dX_1^p}_{d\boldsymbol{f}_{geo_{el}}^{p}} \tag{3.150}$$

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{f}^p_{mat_{el}} &= \int_{L^p_0} \boldsymbol{N}^{pT} \boldsymbol{S}^{pT} \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{cs}} d{\boldsymbol{\epsilon_{ve}}}^{pc} dX^p_1 \\
&= \int_{L^p_0} \boldsymbol{N}^{pT} \boldsymbol{S}^{pT} \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{cs}} \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{N}^p dX^p_1 d\boldsymbol{\eta}^p_{el}
\end{aligned} \tag{3.151}
$$

D'où,

$$
\boldsymbol{K}^p_{mat_{el}} = \int_{L^p_0} \boldsymbol{N}^{pT} \boldsymbol{S}^{pT} \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{cs}} \boldsymbol{S}^p \boldsymbol{N}^p dX^p_1 \tag{3.152}
$$

Le détail sur la développement de la matrice de raideur géométrique $\boldsymbol{K}^p_{geo_{el}}$ n'est pas donnée dans le manuscrit. Le détail sur la matrice de raideur géométrique est donné dans les travaux de (Mathisen et al. 2017) et (Panteli et al. 2022). La somme les matrices $\boldsymbol{K}^p_{mat_{el}}$ et $\boldsymbol{K}^p_{geo_{el}}$ permet d'obtenir la matrice de raideur tangente d'un élément poutre dans son repère local. Son expression dans le repère global est donnée par :

$$
\boldsymbol{K}^p_{tan_{el}} = {\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{lg}}}^{mat} (\boldsymbol{K}^p_{mat_{el}} + \boldsymbol{K}^p_{geo_{el}}) {\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{lg}}}^{matT}; \quad {\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{lg}}}^{mat} = \begin{pmatrix} {\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lg}}}^p & & & \\ & {\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lg}}}^p & & \\ & & {\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lg}}}^p & \\ & & & {\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lg}}}^p \end{pmatrix} \tag{3.153}
$$

En itérant sur tout les éléments, il est possible de construire la matrice de raideur tangente globale en suivant les procédures classiques d'assemblage d'éléments finis. Le problème est résolu avec la méthode de Newton, ce qui donne pour un incrément n :

$$
\boldsymbol{K}^{pg}_{tan}(\boldsymbol{\eta}^{pg}_n) \underbrace{(\boldsymbol{\eta}^{pg}_{n+1} - \boldsymbol{\eta}^{pg}_n)}_{\Delta\boldsymbol{\eta}^{pg}_n} = \boldsymbol{f}^{pg}_{ext}(\boldsymbol{\eta}^{pg}_n) - \boldsymbol{f}^{pg}_{int}; \quad \boldsymbol{\eta}^{pg}_0 = \boldsymbol{0} \tag{3.154}
$$

où,

$$
\Delta\boldsymbol{\eta}^{pg}_n = (\Delta\boldsymbol{\eta}^{pg\,T}_{1n}, \Delta\boldsymbol{\eta}^{pg\,T}_{2n}, ..., \Delta{\boldsymbol{\eta}^{pg}_{N^p_n n}}^T)^T \tag{3.155}
$$

et,

$$\Delta\boldsymbol{\eta}_{1n}^{pg} = (\Delta\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg\ T}, \Delta\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg\ T})^T \tag{3.156}$$

En raison de la relation entre les vecteurs incrémentales $\delta\boldsymbol{\theta_e}^p$ et $\delta\boldsymbol{\phi_c}^p$ (cf. équation (3.115)), il est pertinent de préciser les relations suivantes pour la mise à jour du vecteur des déplacements nodaux généralisés :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{c}1(n+1)}^{pg} &= \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg} + \Delta\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg} \\ \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{c}1(n+1)}^{pg} &= \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg} + \underbrace{\boldsymbol{T}^{\Lambda p^{-1}}\Delta\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg}}_{\Delta\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{c}1n}^{pg}} \end{aligned} \tag{3.157}$$

Dans l'équation (3.154), il est important de noter que le vecteur $\boldsymbol{f}_{ext}^{pg}$, exprimé dans le repère global, est calculé en amont de l'analyse par éléments finis. Par exemple, pour reproduire les essais en bassin, ce vecteur est calculé en projetant les efforts fluides sur la ligne centrale de la poutre (cf. section 3.4.2), ce qui permet d'obtenir une distribution d'efforts et moments nodaux le long de la poutre.

Après résolution de l'analyse par éléments finis, une poutre déformée est obtenue sans prise en compte du gauchissement. À l'aide des rotations et translations nodales, il est possible de déterminer la forme déformée de la géométrie 3D du foil. Afin de prendre en compte le gauchissement pour la reconstruction de la géométrie 3D, il est possible d'évaluer les déformations généralisées le long de la poutre (permettant de calculer les efforts de sections à l'aide de la matrice de raideur $\boldsymbol{K^{cs}}$), qui permettent ensuite de déterminer les formes gauchies des sections à l'aide des fonctions de gauchissement déterminées en amont du calcul poutre (cf. équation (3.98)). En superposant le mouvement rigide et le gauchissement des sections, on obtient une géométrie 3D du foil prenant en compte le gauchissement des sections.

Analyse modale

Finalement, pour réaliser une analyse des modes propres de la structure, une résolution analogue à celle présentée dans la section 3.1.7 est adoptée, en considérant une solution harmonique et en prenant l'équation (3.158) comme point de départ.

$$\boldsymbol{M}^{pg}\ddot{\boldsymbol{\eta}}^{pg} + \boldsymbol{f}_{int}^{pg} = 0; \quad \boldsymbol{M}^{pg}\ddot{\boldsymbol{\eta}}^{pg} + \boldsymbol{K}_{mat}^{pg}(\boldsymbol{\eta}_0^{pg})\boldsymbol{\eta}^{pg} = 0 \tag{3.158}$$

Dans l'équation (3.158), la matrice de masse globale $\boldsymbol{M}^{pg}$ est construite en assemblant les matrices de masse élémentaires dans le repère globale définies par ${\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{lg}}}^{mat}\boldsymbol{M}_{el}^{p}{\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{lg}}}^{mat^T}$.

3.3.3 Mise en place du modèle

Dans les sections précédentes, la modélisation d'une structure allongée en éléments poutres équivalents est détaillée. Pour rappel, une analyse des sections de la structure est réalisée et les résultats de cette analyse sont utilisés pour définir des éléments finis 1D de type poutre. Le modèle numérique *Abaqus 1D* présenté dans cette section reproduit au mieux les essais en air présentés dans la section 2.2). Ce modèle est illustré dans la figure 3.14, où les points d'intérêts du modèle *Abaqus 3D* sont également présents. Leur définition est la même que pour le modèle *Abaqus 3D*, détaillée dans la section 3.2.3.

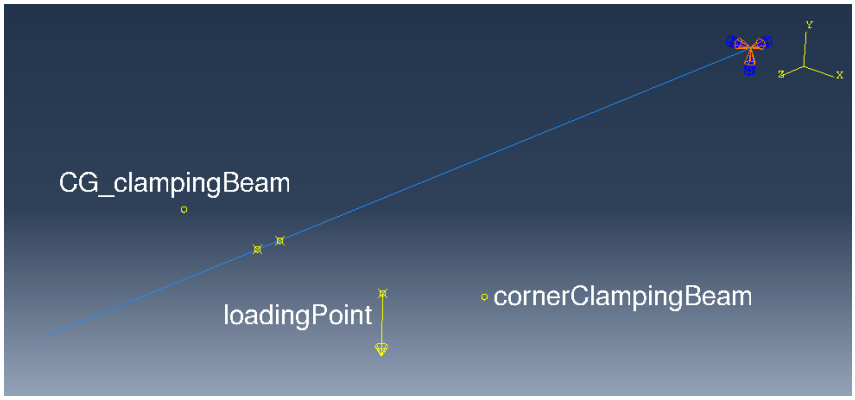


FIGURE 3.14 – Illustration des conditions limites et du chargement du foil pour le modèle éléments finis *Abaqus 1D*.

Dans *Abaqus 1D*, une seule analyse de section est réalisée car les foils sont prismatiques. La section est discrétisée avec des éléments triangulaires WARPF2D3 dans Abaqus^{TM}, modélisant le gauchissent hors plan des sections avec une méthode analogue à celle présentée dans la section 3.3.1. Le maillage optimal est illustré dans la figure 3.9, sa détermination est détaillée ci-dessous :

Convergence en maillage de l'analyse de sections

De la même manière que pour *Abaqus 3D*, le maillage optimal de la section est obtenu en diminuant la taille caractéristique d'une maille jusqu'à convergence des résultats. En premier approche, la convergence des termes de la matrice de section $\boldsymbol{K^{cs}}$ semble appropriée mais les simulations montrent que ces valeurs convergent plus vite que le champ de contraintes dans la section, obtenue pour un effort de section donnée, à partir des fonctions de gauchissement. Le cas de chargement retenu pour la convergence est le même que pour *Abaqus 3D*, explicité dans le tableau 3.2. À partir des résultats obtenus avec le modèle poutre, dont la convergence en maillage est présentée plus tard dans le manuscrit, le gauchissement d'une section placée à une distance $Z = 0.27$ m de l'encastrement est calculé, les tailles de maille considérées varient entre 20 cm et 3 mm. Dans le tableau ci-dessous, les valeurs du terme de couplage flexion torsion K^{cs}_{46} et des contraintes principales maximales et minimales sont présentées pour les différents maillages testés.

Taille d'une maille de la peau	Nombres de mailles	K^{cs}_{46}	$\sigma^{min}_{11}(Pa)$	$\sigma^{max}_{11}(Pa)$	$\sigma^{min}_{22}(Pa)$	$\sigma^{max}_{22}(Pa)$	$\sigma^{min}_{33}(Pa)$	$\sigma^{max}_{33}(Pa)$
0.2	621	3.28E+2	-1.86E+7	1.86E+7	-8.61E+5	1.00E+6	-4.06E+6	3.98E+6
0.1	971	3.28E+2	-2.79E+5	1.47E+5	-3.10E+4	3.16E+3	-2.66E+4	3.89E+4
0.015	1573	3.27E+2	-2.79E+5	1.47E+5	-3.08E+4	3.16E+3	-2.66E+4	3.89E+4
0.01	1631	3.27E+2	-2.79E+5	1.47E+5	-3.07E+4	3.16E+3	-2.66E+4	3.89E+4
0.003	2865	3.27E+2	-2.79E+5	1.47E+5	-3.07E+4	3.15E+3	-2.66E+4	3.89E+4

TABLE 3.4 – Résultats de la convergence en maillage du modèle éléments finis d'analyse de sections.

Le tableau 3.4 montre la bonne convergence de l'analyse de section lors du raffinement du maillage. Celui-ci montre que les termes de la matrice de raideur convergent très rapidement, la valeur du couplage flexion-torsion obtenue avec le maillage le moins fin est très proche de la valeur obtenue sur les maillages les plus fins. Au vu de ces résultats, une taille caractéristique de maille de 1 cm est considérée pour le maillage optimal pour s'assurer d'avoir une bonne reconstruction du champ de contraintes dans la section. L'analyse de section réalisée dans Abaqus™ permet la détermination des propriétés équivalentes d'une section, indispensables pour la définition du comportement élastique des éléments poutres. Les résultats de ce calcul permettent de reconstruire les sections déformées à partir des efforts nodaux des éléments poutre déformés. Cette reconstruction permet de

prédire le champ de contraintes dans la section mais également le gauchissement, ce qui permet d'étudier les déformations locales du foil.

Du fait de leur propriétés structurelles différentes, les 4 foils étudiés sont caractérisés par des centres de cisaillement différents, qui seront ensuite utilisés pour définir la position initiale des nœuds de la poutre. Par contre, les foils ont les mêmes propriétés massiques, ce qui se traduit par des centres de masses identiques. Les valeurs de centres de cisaillement et de masse pour les différents foils sont listées ci-dessous en considérant le bord d'attaque du foil comme origine et le repère présenté dans la figure 3.9.

Orientation du pli d'UD	Centre de cisaillement (X, Y)	Centre de masse (X, Y)
-50°	(-92.56, 0.00) mm	(-113.1, 0.00) mm
-30°	(-92.11, 0.00) mm	(-113.1, 0.00) mm
-10°	(-94.46, 0.00) mm	(-113.1, 0.00) mm
30°	(-92.11, 0.00) mm	(-113.1, 0.00) mm

TABLE 3.5 – Centres de cisaillement des foils étudiés calculés numériquement.

La position de ce centre n'étant pas fonction de la position de la section selon l'envergure, la ligne centrale représentant le foil est donc un segment de 1.375 m de long aligné avec la direction Z, avec des coordonnées constantes selon X et Y défini par le centre de cisaillement. Ce segment est ensuite discrétisé en une multitude d'éléments finis linéiques. Ces éléments sont des éléments poutres linéaires de Timoshenko constitué de 2 nœuds. Cet élément, nommé B31 dans Abaqus^{TM}, est dit linéaire car ses fonctions de forme le sont (cf. section 3.3.2). Cependant, l'analyse par éléments finis est réalisée avec la méthode de Newton, ce qui signifie que les non-linéarités géométriques sont prises en compte. Afin de reproduire les expériences, une condition d'encastrement est définie à la base du foil ($Z = 0m$) et un effort ponctuel est appliqué de la même façon que dans le modèle *Abaqus 3D*. Pour ce faire, le point d'application de la force (*loadingPoint*) est défini et avec une contrainte MPC, ce point est lié rigidement aux éléments poutres correspondant à la position du carcan le long de l'envergure (illustrée par les cercles jaunes dans la figure 3.14). Le point *loadingPoint* est également relié avec une contrainte MPC aux points de références *cornerClampingBeam* et *CG_clampingBeam*, permettant de mesurer directement le déplacement du coin du carcan et de prendre en compte son poids. Une force ponctuelle non-suiveuse est définie au niveau du point *CG_clampingBeam*, pour modéliser le poids d'une masse de 3.54 kg.

La masse de l'ensemble du foil est prise en compte de manière différente dans le

modèle *Abaqus 3D* car le centre de masse de la section n'est pas confondu avec son centre de cisaillement, il n'est donc pas possible d'appliquer les efforts de gravité sur les nœuds de la poutre (définis à partir du centre de cisaillement). Pour modéliser la gravité dans *Abaqus 1D*, un ensemble de points passant par les centres de masse des sections est défini. Le nombre de points définis est identique aux nombres de nœuds définissant les éléments poutres. Cela permet de lier deux à deux, avec une contrainte MPC, les nœuds des éléments poutres avec les points modélisant les centres de masses des sections. Des efforts ponctuels sont ensuite définis au niveau des centres de masses pour modéliser le poids du foils, ces efforts sont fonctions de la discrétisation de la ligne centrale (longueur des éléments), de la gravité terrestre et de la masse linéique des foils. Afin d'étudier la déformation locale du foil au niveau du mouchetis, associée aux résultats du GOM-5M, la position de deux nœuds de la poutre est imposée afin de pouvoir reconstruire la section gauchie du foil précisément au niveau du mouchetis. Les nœuds fixes sont définis en $Z = 0.27$ m et $Z = 0.35$ m, ce qui correspond aux extrémités du mouchetis, tel qu'illustré dans la figure 2.7. La déformation du foil proche de l'encastrement est alors calculée comme la somme de la contribution du mouvement rigide de la section (calculé avec les déplacements et rotations nodales des éléments poutres) et du gauchissement (calculé en reconstruisant la section gauchie). Pour finir la présentation du modèle *Abaqus 1D*, le choix du nombre d'éléments poutres modélisant le foil est discuté.

Convergence en maillage du modèle de poutre

Afin de déterminer la discrétisation optimale, le même cas de chargement que précédemment est retenu (cf. tableau 3.2) et différents maillages sont testés, avec des tailles d'éléments variant de 6.8 mm (200 éléments) à 6.8 cm (20 éléments). Pour chaque maillage, le déplacement du coin du carcan est mesuré et comparé avec les résultats du maillage le plus fin. Le tableau ci-dessous regroupe ces résultats.

Le tableau 3.6 montre la bonne convergence du modèle *Abaqus 1D* lorsque le maillage est raffiné. Les résultats montrent qu'à partir de 70 éléments, la différence avec le maillage le plus fin descend en dessous de 0.15%. Le maillage retenu est donc celui avec 70 éléments.

3.4 Modélisation Fluide : PUFFIn

Dans les sections 3.2.3 et 3.3.3, la modélisation du comportement élastique des foils est présentée. La suite logique est donc de modéliser le fluide dans lequel les foils sont

Nombres d'éléments	Longueur d'un élément poutre (m)	$D_{mag}(m)$	$R_{mag}(°)$	$\Delta {D_{mag}}^{fin}$ (%)	$\Delta {R_{mag}}^{fin}$ (%)
20	6.88E-02	9.32E-02	7.72	1.39	1.53
30	4.58E-02	9.38E-02	7.78	0.69	0.83
40	3.44E-02	9.41E-02	7.80	0.38	0.50
50	2.75E-02	9.41E-02	7.80	0.43	0.55
60	2.29E-02	9.43E-02	7.83	0.22	0.19
70	1.96E-02	9.44E-02	7.83	0.14	0.11
80	1.72E-02	9.44E-02	7.83	0.12	0.11
100	1.38E-02	9.44E-02	7.83	0.11	0.12
150	9.17E-03	9.45E-02	7.84	0.01	0.01
200	6.88E-03	9.45E-02	7.84	0.00	0.00

TABLE 3.6 – Résultats de la convergence en maillage du modèle numérique *Abaqus 1D*.

amenés à évoluer. Dans cette section, la modélisation numérique de l'écoulement réalisée avec le logiciel *PUFFIn* est présentée. Dans un second temps, le couplage entre *PUFFIn* et Abaqus^{TM}, permettant de décrire les interactions fluides-structures du foil, est détaillé.

3.4.1 PUFFIn

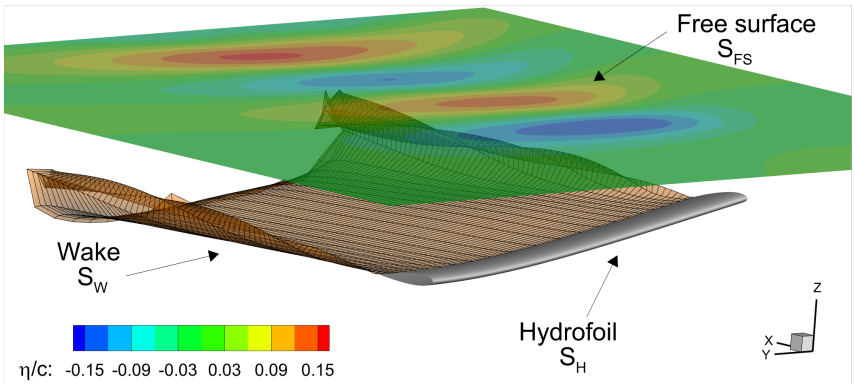


FIGURE 3.15 – Surfaces limites définies pour la résolution de l'écoulement dans *PUFFIn*.

Le logiciel *PUFFIn* développé à l'ENSTA Bretagne, par un post-doctorant financé par les projets OptiFoil et UNIFoil, permet de prédire la performance de foils évoluant dans un écoulement avec surface libre. Ce code est basé sur la théorie des écoulements

potentiels et plus précisément sur la méthode des éléments frontières où *Boundary Element Method (BEM)* en anglais. Une brève description de ce code est donnée dans cette section. Les hypothèses posées lors de la modélisation d'un écoulement potentiel sont rappelées ci-dessous :

— La viscosité du fluide est négligée ;
— L'écoulement est incompressible ;
— L'écoulement est irrotationnel ;

Dans ces conditions, le champ de vitesse du fluide $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ s'exprime comme la superposition d'un écoulement non perturbé $\boldsymbol{U}_0$ et du gradient d'un potentiel de vitesse $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ vérifiant l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{3.159}$$

La seconde identité de Green permet de montrer que cette équation est équivalente à une équation intégrale aux frontières sur les limites du domaine (Katz et al. 2001). Ces limites sont la surface du foil S_H, la surface libre S_{FS} et la surface du sillage S_W, toutes illustrées dans la figure 3.15 :

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\int_{S_H+S_{FS}} \left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r} - \phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS - \frac{1}{4\pi}\int_{S_W}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS \tag{3.160}$$

Avec $\boldsymbol{n}$ la normale d'une surface orientée vers l'extérieur. Des conditions limites supplémentaires sont nécessaires pour résoudre cette équation. Sur la surface du foil, la condition de non-pénétration stipule que :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3.161}$$

De plus, la condition linéarisée de Neumann-Kelvin (Newman 2018) est imposée sur la surface libre non perturbée.

$$\left(\boldsymbol{U_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)^2\phi + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{3.162}$$

La relation de Bernoulli permet d'obtenir l'élévation de surface libre par rapport à sa position initiale tel que :

$$\eta = -\frac{\boldsymbol{U_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi}{g} \tag{3.163}$$

Le problème est résolu de manière itérative. Une approche Lagrangienne est utilisée

pour construire itérativement la surface du sillage durant le calcul. Pour des fluides non-visqueux, le potentiel sur une facette du sillage convectée par l'écoulement doit rester constant. En conséquence, la distribution du potentiel ϕ dans le sillage s'obtient en utilisant une condition de Kutta, qui impose l'égalité des pressions sur l'intrados et l'extrados du foil au niveau du bord de fuite. La construction de la solution numérique est réalisée en discrétisant les surfaces frontières en quadrilatères où le potentiel ϕ est supposé constant. Plus de détails sur la théorie et la méthode de résolution sont disponibles dans (Perali et al. 2024b) et dans la documentation de *PUFFIn* (*PUFFIn documentation* 2023). La distribution de pression sur la surface du foil est obtenue en appliquant la relation de Bernoulli. L'intégration de ces pressions permet d'obtenir les efforts et moments hydrodynamiques subis par le foil. Dans le cadre de la reproduction des essais en bassin, la longueur de la surface libre selon la direction de l'écoulement est définie entre 2.5 cordes en amont du foil et 7.5 cordes en aval. Dans la direction transverse, la largeur de la surface libre est de 7 fois l'envergure, et le foil est centré par rapport à cette surface.

Convergence en maillage

Pour résoudre le problème, les trois surfaces frontières (S_H, S_{FS} et S_W) doivent être discrétisées. Afin de trouver le maillage optimal, trois niveaux de raffinements sont considérées et l'incertitude sur la portance prédite avec les différents maillages est estimée en utilisant la méthode GCI (Roache 1994). Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous où Nx_{foil}, Ny_{foil}, Nx_{SL} et Ny_{SL} représente le nombre de mailles dans les directions X et Y (cf. figure 3.15) pour les surfaces discrétisées du foil et de la surface libre (SL). De plus, C_d et C_l sont respectivement les coefficients de traînée et de portance du foil, obtenus en intégrant les pressions sur la surface du foil.

Nx_{foil}	Ny_{foil}	N_{SL}	Ny_{SL}	Incertitude C_d(%)	Incertitude C_l(%)	Incertitude sur l'effort total
70	17	99	20	16.8	4.7	4.9
100	24	140	28	13.1	3.5	3.6
142	34	198	54	10.2	2.6	2.7

Table 3.7 – Résultats de la convergence en maillage du foil modélisé dans *PUFFIn*.

La convergence en maillage montre une incertitude plus importante sur le coefficient de traînée par rapport au coefficient de portance. Cela est dû à des différences d'écoulement

proche du bord de fuite, qui sont dépendantes de la discrétisation. La figure 3.16 illustre le champ de pression sur la surface du foil à mi-envergure et proche de son extrémité, les coefficients de pression (C_p) sont évalués pour les trois niveaux de raffinements. Dans la figure 3.16, x/c représente la distance au bord de fuite adimensionnée par la corde du profil.

Les résultats mettent en avant les différences entre les coefficients de pression prédits avec les différents maillages à proximité du bord de fuite ($x/c > 0.95$). Ces différences sont très petites et localisées, c'est pourquoi l'incertitude sur la traînée n'est pas considérée problématique. De plus, l'incertitude sur l'effort total montre que la contribution de la traînée du foil est faible.

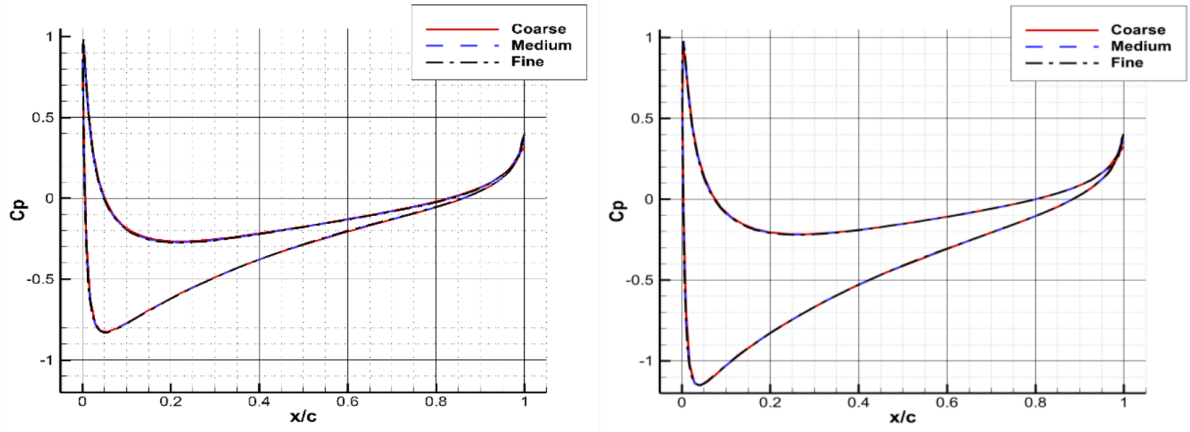


FIGURE 3.16 – Coefficients de pression sur la surface du foil évalués à mi-envergure et près de son extrémité.

L'incertitude de 3.5% sur le coefficient de portance est considérée acceptable. Donc, dans le maillage retenu, le foil est discrétisé en 100 facettes selon la corde et 24 selon l'envergure. La surface libre est quant à elle divisée en 140 facettes dans le sens de l'écoulement et 28 facettes dans la direction transverse.

3.4.2 Couplage PUFFIn/Abaqus™

Pour modéliser les interactions fluide-structure d'un foil, il est classique d'adopter une approche partitionnée où un solveur fluide échange avec un solveur structure. Le solveur fluide calcule les efforts appliqués sur le foil, qui sont utilisés pour calculer sa déformation via le solveur structure. En réalité, deux couplages sont mis en place, un pour le modèle

Abaqus 1D et un pour *Abaqus 3D*. Les couplages sont très similaires mais présentent des différences pour la déformation du maillage fluide et la transmission des efforts entre *PUFFIn* et Abaqus™.

Le couplage IFS est explicite et Quasi-Statique (QS), ce qui signifie qu'à chaque itération, le système est considéré à l'équilibre statique. Ce genre de couplage ne prend donc pas en compte l'accélération du foil et les effets de masse ajoutée. La figure 3.17 illustre les deux stratégies de couplages. La communication entre le solveur fluide et structure est réalisée à l'aide de scripts *Python*.

Les étapes principales des couplages sont similaires, le calcul IFS commence avec un premier calcul fluide sur la géométrie non-déformée du foil pour déterminer la distribution de pression à la surface du foil. C'est ensuite le début du processus itératif, qui commence par une analyse par éléments finis permettant de calculer la déformation du foil induite par les effort fluides. Les résultats fournis par le solveur structure sont ensuite utilisés pour déformer le maillage fluide, avec lequel *PUFFIn* modélise le nouveau champ de pression sur le foil. Ces deux étapes sont répétées jusqu'à convergence des efforts et déplacements du foil. Il est important de noter que chaque calcul structure est réalisé en considérant la géométrie initiale du foil, ce qui est possible car les déformations du foil ne sont pas trop grandes. La seule différence entre les calculs structures réalisés dans une boucle IFS est donc le chargement, qui évolue en fonction de la déformation du maillage fluide.

Deux critères de convergence sont définis, ϵ_s et ϵ_f, respectivement pour le solveur structure et le solveur fluide. ϵ_s est obtenu comme la différence de déplacement de l'extrémité du foil entre une itération courante I et l'itération précédente $I-1$. u_s^{tip} est la norme du vecteur déplacement à l'extrémité du foil. le critère de convergence fluide ϵ_s est défini comme la différence de magnitude des efforts fluide entre l'itération actuelle et la précédente. La magnitude des efforts fluide à l'itération courante est notée F_I. Un nombre minimum d'itération I_{min} est imposé pour vérifier la bonne convergence du calcul. À la fin d'un calcul fluide sur une géométrie déformée, si le nombre d'itérations I est supérieur à I_{min} et que les efforts fluides et déplacements sont convergés, le calcul s'arrête, sinon, une itération supplémentaire est réalisée.

Les résultats numériques reproduisant les essais en bassins sont obtenus en considérant les deux critères de convergence ϵ_s et ϵ_f égaux à 0.5%. De manière générale, ce type de calcul IFS converge en environ 5 itérations. Les résultats fournis par ce type de calcul sont :

— La géométrie 3D du foil déformé ;

— Le champ de pression sur le foil déformé ;
— Les Efforts hydrodynamiques appliquées sur le foil (portance,traînée) ;
— Le lacet et l'assiette pris par le foil, uniquement lorsque le positionnement dynamique est activée dans *PUFFIn* (cf. section 5.2.2).

Couplage PUFFIn/Abaqus 3D

La discrétisation en éléments finis des foils étudiés est identique à celle considérée pour reproduire les essais en air (cf. figure 3.7). Celle-ci est bien plus fine que celle du maillage utilisé dans *PUFFIn*, ce qui implique une interpolation du champ de pression sur le maillage éléments finis. Cette interpolation, basée sur un algorithme de pondération des distances (*Distance Weigthing Algorithm*), est implémentée directement dans Abaqus^{TM}. Le champ de déplacement obtenu après un calcul structure est exprimé sur les nœuds du maillage éléments finis. Comme ces nœuds ne coïncident pas avec ceux du maillage fluide, une seconde interpolation est réalisée. La méthode d'interpolation RBF (*Radial Basis Function*) est choisie pour déterminer le déplacement des nœuds du maillage fluide à partir des résultats du modèle *Abaqus 3D*.

Comme l'intégralité des calculs structures est réalisée en prenant le foil non déformé comme point de départ, il faut impérativement exprimer le champ de pression du foil sur sa configuration initiale. Pour ce faire, après la détermination d'un champ de pression sur un maillage déformée avec *PUFFIn*, les valeurs de pression sur chaque facettes du maillage sont assignées à leur facette correspondante sur le maillage fluide non-déformé.

Couplage PUFFIn/Abaqus 1D

La mise en place du couplage *PUFFIn/Abaqus 1D* est plus complexe que celle du couplage *PUFFIn/Abaqus 3D* car il faut projeter un champ de pression tri-dimensionnel sur des éléments poutres. Pour ce faire, le champ de pression calculé par *PUFFIn* est exprimé comme un ensemble d'efforts ponctuels, obtenu à partir des vecteurs positions, des vecteurs de surface et des pressions calculées dans les facettes fluides. Ensuite, pour chaque effort ponctuel, l'élément poutre le plus proche de son point d'application est déterminé. L'effort est alors réparti sur les deux nœuds de l'élément poutre correspondant.

La figure 3.18 illustre la méthode de projection, où un élément poutre est défini entre les nœuds N_1 et N_2 et un effort ponctuel $\boldsymbol{F}$ appliqué en X. Le point X_p est défini comme la projection de X sur l'élément poutre. X_p permet la définition d'un paramètre adimensionnel ξ utilisé pour distribuer l'effort ponctuel entre les deux nœuds N_1 et N_2

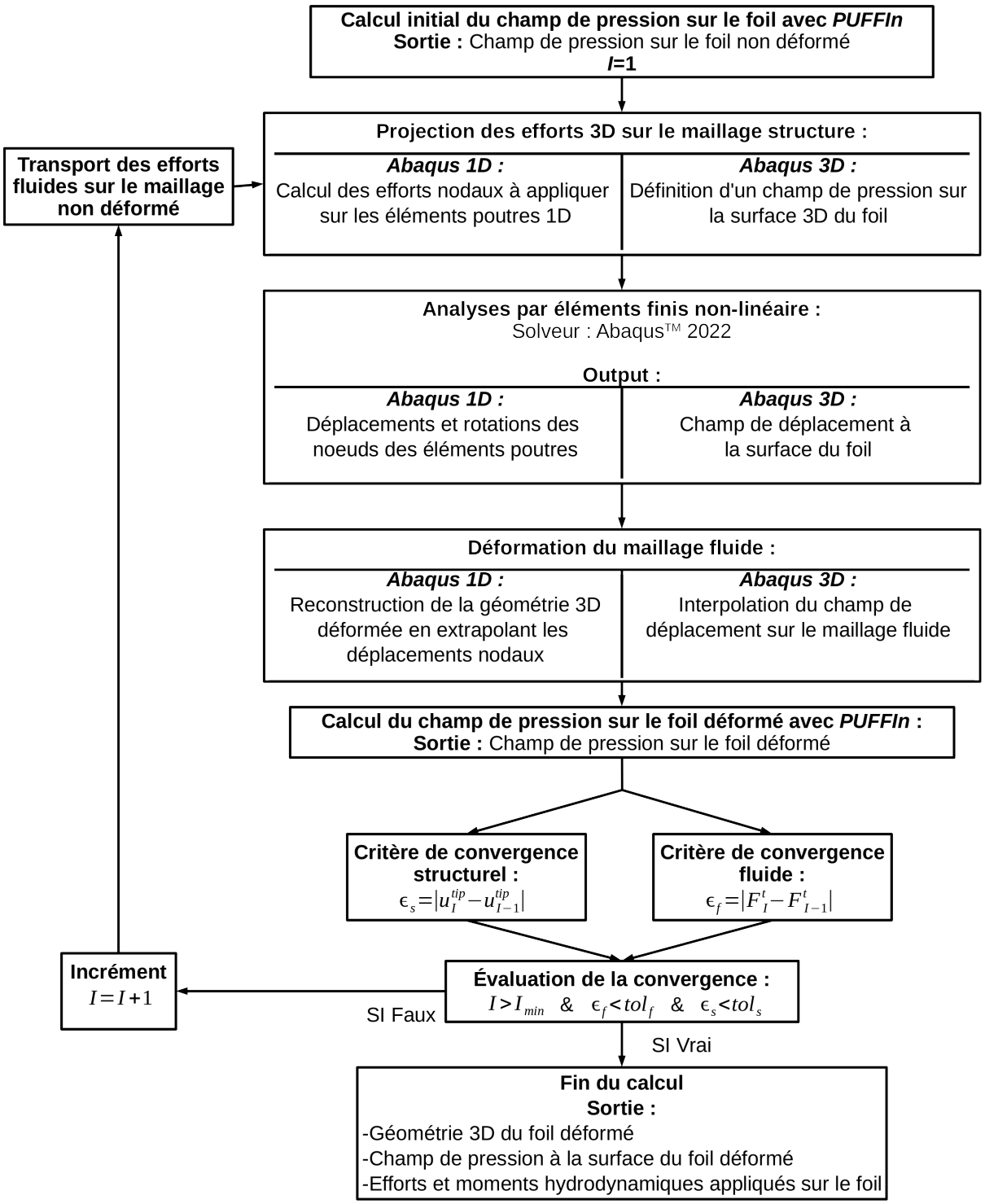


FIGURE 3.17 – Diagramme explicatif des couplages IFS *PUFFIn/Abaqus 1D* et *PUFFIn/Abaqus 3D*.

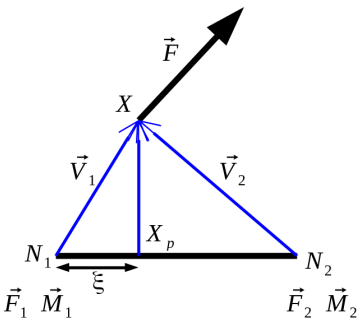


FIGURE 3.18 – Illustration de la méthode de projection des efforts dans le couplage *PUFFIn/Abaqus 1D*.

$$\xi = \frac{\|\boldsymbol{N_1 X_p}\|}{\|\boldsymbol{N_1 N_2}\|} \tag{3.164}$$

L'effort $\boldsymbol{F}$ est distribué entre les deux nœuds de la poutre en fonction de la valeur de ξ. Dans la figure 3.18, $\boldsymbol{F_1}$ et $\boldsymbol{F_2}$ sont les efforts nodaux respectivement appliqués en N_1 et N_2. Ces efforts sont définis par :

$$\boldsymbol{F_1} = (1-\xi)\boldsymbol{F}; \quad \boldsymbol{F_2} = \xi \boldsymbol{F} \tag{3.165}$$

Les moments nodaux, $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$ dans la figure 3.18, sont calculés avec les efforts nodaux et les vecteurs $\boldsymbol{V_1}$ et $\boldsymbol{V_2}$, respectivement définis comme $\boldsymbol{N_1 X}$ et $\boldsymbol{N_2 X}$.

$$\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{V_1} \wedge \boldsymbol{F_1}; \quad \boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{V_2} \wedge \boldsymbol{F_2} \tag{3.166}$$

Les efforts et moments nodaux ne sont pas suiveurs, ce qui signifie que leur orientation est constante durant les itérations de l'analyse par éléments finis. Des problèmes de projection peuvent survenir si une face fluide recouvre deux éléments poutres ou plus. Pour s'affranchir de ce type de problèmes, le maillage fluide est raffiné à l'aide du maillage 1D avant le début de la boucle IFS. Pour ce faire, des plans 2D perpendiculaires à la direction longitudinale des éléments poutres sont définis pour chacun des nœuds des éléments poutres. Ensuite, les mailles fluides intersectant ces plans sont décomposés en sous-faces pour assurer une bonne projection des efforts fluides. Après le calcul de la déformation du foil, le maillage fluide doit être déformé en conséquence. Il faut donc extrapoler la déformation des éléments poutres à la géométrie 3D du foil. Pour reconstruire la géométrie 3D déformée, chacun de ses points est projeté sur l'élément poutre le plus proche. Durant

cette étape, 2 cas de figures peuvent être rencontrés.

1. Le point est projeté sur un nœud d'un élément poutre → son déplacement est calculé à partir du déplacement nodal correspondant ;
2. Le point est projeté sur un point quelconque d'un élément poutre → son déplacement est calculé à partir d'un déplacement nodal obtenu en interpolant les deux déplacements nodaux de la poutre via les fonctions de forme de l'élément poutre (cf. section 3.3.2).

Soit un point X de la géométrie 3D et X_p sa projection sur un élément poutre, le déplacement $\boldsymbol{DX}$ du point X est fonction du vecteur $\boldsymbol{X_pX}$ (cf. figure 3.18), du déplacement $\boldsymbol{DX_p}$ de X_p et de la rotation de X_p sous forme matricielle, notée $\boldsymbol{RX_p}$.

$$\boldsymbol{DX} = \boldsymbol{DX_p} + \boldsymbol{RX_pX_pX} \tag{3.167}$$

Dans le cas où X est projeté sur N_1, l'équation (3.167) devient :

$$\boldsymbol{DX} = \boldsymbol{DN_1} + \boldsymbol{RN_1N_1X} \tag{3.168}$$

où $\boldsymbol{DN_1}$ et $\boldsymbol{RN_1}$ sont respectivement la translation et la rotation (sous forme matricielle) du nœud N_1. Avec cette méthode, les sections du foil adoptent un mouvement de corps rigide, ce qui signifie que le gauchissement est négligé pour la déformation du maillage fluide. De la même manière que pour le couplage *PUFFIn/Abaqus 3D*, les calculs structures sont exclusivement réalisés en considérant la géométrie non-déformée du foil. Ce qui implique que les efforts ponctuels de pression doivent être exprimés sur le maillage non-déformée. Les points d'application des efforts (X dans la figure 3.18) sont alors identifiés sur le maillage fluide non déformé et sont gardés constants durant la boucle IFS . Cependant, les efforts $\boldsymbol{F}$ sont calculés sur le maillage fluide courant, ce qui signifie que leurs orientations varient avec la déformation du foil, ce qu'il faut impérativement prendre en compte. Avec cette approche, les efforts nodaux appliqués sur les éléments poutres sont rigoureusement équivalents aux efforts de pressions calculés sur un maillage fluide déformé.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les notions théoriques permettant la modélisation numérique des IFS d'un hydrofoil souple en matériaux composites en écoulement sont présentées. La

modélisation de la réponse élastique des foils est d'abord présenté, en commençant par des rappels généraux sur la MEF. Les analyses par éléments finis réalisées dans cette thèse sont statiques et prennent en compte les non-linéarités géométriques des structures.

Des modélisations haute et basse fidélité, toutes deux implémentées dans le logiciel commercial *Abaqus*™, sont considérées afin de réaliser une validation numérique du modèle basse fidélité. La modélisation haute-fidélité est d'abord présentée, où le foil est modélisé à l'aide d'éléments finis volumiques 3D et coques 2D, respectivement associés à l'âme et à la peau du foil. Cette modélisation est classique et servira donc de référence pour le processus de validation de la modélisation basse fidélité. Cette dernière repose sur la décomposition du problème 3D en une série d'analyse de sections linéaires (problèmes 2D) et une analyse par éléments finis de type poutre non-linéaire (problème 1D). La méthode d'analyse de sections inhomogènes et anisotropes est présentée en première. Pour réaliser cette analyse, le champ de déplacement d'une section de poutre est assimilé à une translation, une rotation rigide (considérée petite) et une composante de gauchissement. Cette analyse permet d'obtenir les propriétés équivalentes d'une section (raideurs et couplages entre les modes de déformation) ainsi que ses fonctions de gauchissement, permettant d'évaluer la forme déformée d'une section et son champ de contrainte 2D pour un effort quelconque appliqué sur la section. Ensuite, le modèle de poutre équivalente est détaillé, où les rotations des sections sont résolues exactement et le gauchissement est négligé. Il est cependant possible d'ajouter à la fin du calcul de gauchir les sections à l'aide des fonctions de gauchissement déterminées durant l'analyse de sections. L'écoulement fluide autour du foil est modélisé avec le logiciel *PUFFIn* dont les concepts sont brièvement exposés. Pour finir, les couplages entre les modèles éléments finis haute et basse fidélité et *PUFFIn* sont présentés. Le chapitre 4 présente la validation numérique et expérimentale du modèle de poutre équivalente, avant de l'exploiter pour résoudre un problème d'optimisation dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Validation des modèles numériques

4.1 Essais en air

Cette section présente les résultats de la première campagne expérimentale réalisée au cours de cette thèse, ayant pour objectif de valider la capacité des modèles numériques à prédire la réponse élastique de foils en composite. Les 4 foils étudiés et le dispositif expérimental sont présentés dans les sections 2.1 et 2.2. Pour commencer cette section, le gain de temps de calcul entre le modèle haute fidélité *Abaqus 3D* et le modèle basse fidélité *Abaqus 1D* est présenté. Ensuite, les propriétés équivalentes des sections des différents foils sont comparées afin de pouvoir interpréter les résultats expérimentaux. Dans un troisième temps, les résultats expérimentaux obtenus avec le GOM-5M et le GOM SCAN sont comparés aux résultats numériques pour différents cas de chargement. Ensuite, une comparaison numérique des gauchissements des sections obtenus avec *Abaqus 3D* et *Abaqus 1D* est réalisée, suivie d'une discussion sur l'influence du rapport d'aspect des foils sur la validité du modèle de poutre équivalente. Pour finir, une étude des modes propres des foils réalisée avec les deux modèles numériques est présentée.

4.1.1 Temps de calcul

Le modèle de poutre équivalente est considérablement plus rapide que le modèle éléments finis 3D, ce qui est principalement dû au nombre d'éléments 10 000 fois supérieur dans le modèle 3D. Afin d'illustrer le gain de temps permis par le modèle de poutre équivalente, le tableau 4.1 présente le détail du temps nécessaire pour réaliser une analyse par éléments finis du foil avec une orientation de $-50°$. Le cas de chargement retenu est le même que celui défini pour la convergence en maillage (cf. tableau 3.2).

Le temps de calcul associé au modèle de poutre équivalente est divisé en quatre contributions dans le tableau 4.1, l'analyse de section, l'analyse par éléments finis, la reconstruction de la géométrie 3D et la reconstruction d'une section gauchie. Ce tableau permet de

	Nombre de Processeurs	Temps de calcul (s)
Abaqus 3D	16	1.4E+05
Analyse de sections	1	6.1E+00
Abaqus 1D	1	1.0E-01
Reconstruction de la géométrie 3D	1	1.2E-01
Reconstruction d'une section gauchie	1	4.4E+01

TABLE 4.1 – Temps de calculs des différentes analyses par éléments finis.

conclure que dans le cas présent où 70 éléments poutres sont définis, le temps de calcul requis pour reconstruire la géométrie 3D en prenant en compte le gauchissement avoisine les 50 minutes. Sans la modélisation du gauchissement, le temps de calcul est drastiquement réduit à 6.7 secondes. C'est pourquoi la section 4.1.6 présente une comparaison de la magnitude du gauchissement par rapport au mouvement de corps rigide afin de déterminer s'il est négligeable.

L'analyse éléments finis 3D est réalisée avec 16 processeurs et malgré ça, la méthode de poutre équivalente reste nettement plus rapide, même dans le cas où gauchissement est modélisé. Avec le gauchissement, le modèle de poutre équivalente est 50 fois plus rapide que le modèle 3D et 20 000 fois plus rapide sans. Ces résultats illustrent l'intérêt d'un modèle de poutre équivalente pour économiser du temps de calcul. Ce temps de calcul est d'autant plus important dans une simulation IFS où l'analyse de section est réalisée une seule fois au début du calcul. Pour un foil non prismatique, l'étape d'analyse des sections est plus coûteuse en temps de calcul car le nombre de sections analysées est à adapter en fonction des variations structurelles et géométriques le long de son envergure.

4.1.2 Propriétés équivalentes des sections

Les résultats de l'analyse de section sont intéressants à analyser en amont des résultats expérimentaux afin de mieux comprendre le comportement des foils en fonction de l'orientation de leur pli d'UD. Les raideurs principales et le coefficient de couplage flexion-torsion (CFT) des différents foils est présenté dans le tableau 4.2. Ces valeurs sont données relativement au repère E^p, illustré dans la figure 3.9.

Le tableau 4.2 met en évidence une diminution de la raideur axiale (K_{11}^{cs}) et des raideurs en flexion (K_{55}^{cs} et K_{66}^{cs}) lorsque l'orientation du pli d'UD s'éloigne de 0°, ce qui est un

Orientation du pli d'UD	$-50°$	$-30°$	$-10°$	$30°$
K_{11}^{cs} (N)	1.91e+06	3.16e+06	5.14e+06	3.16e+06
K_{22}^{cs} (N)	8.05e+05	8.26e+05	4.53e+05	8.26e+05
K_{33}^{cs} (N)	7.65e+04	6.83e+04	6.56e+04	6.83e+04
K_{44}^{cs} $(N.m^2)$	6.18e+02	6.83e+02	3.55e+02	6.83e+02
K_{55}^{cs} $(N.m^2)$	3.36e+02	5.90e+02	9.52e+02	5.90e+02
K_{66}^{cs} $(N.m^2)$	1.13e+04	1.56e+04	2.90e+04	1.56e+04
K_{45}^{cs} $(N.m^2)$	1.03e+02	3.37e+02	2.14e+02	-3.37e+02

TABLE 4.2 – Propriétés équivalentes des 4 foils testés expérimentalement.

comportement attendu en étudiant des matériaux composites. La raideur en torsion K_{44}^{cs} est maximale pour l'orientation de $\pm 30°$, ce qui est également attendu au vu des travaux de (BISHAY et al. 2021) montrant une raideur en torsion maximale atteinte pour une orientation de fibres de $\pm 25°$.

Afin d'interpréter la valeur du CFT, il est pertinent de développer l'expression du moment de section de torsion à partir de la définition de la matrice de raideur équivalente de l'équation (3.54).

$$M_1^p = K_{14}^{cs}\tau_1^p + K_{24}^{cs}\tau_2^p + K_{34}^{cs}\tau_3^p + K_{44}^{cs}\kappa_1^p + K_{45}^{cs}\kappa_2^p + K_{46}^{cs}\kappa_3^p \tag{4.1}$$

En isolant la déformation en torsion de la section κ_1^p, l'équation (4.1) devient :

$$\kappa_1^p = \frac{1}{K_{44}^{cs}}(M_1^p - K_{14}^{cs}\tau_1^p - K_{24}^{cs}\tau_2^p - K_{34}^{cs}\tau_3^p \underbrace{-K_{45}^{cs}\kappa_2^p}_{\substack{\text{Contribution de la} \\ \text{flexion à la torsion}}} - K_{46}^{cs}\kappa_3^p) \tag{4.2}$$

L'équation (4.2) montre que pour un CFT (K_{45}^{cs}) positif (non-nul), une déformation en flexion τ_2^p positive induit une déformation en torsion κ_1^p de signe opposé. Dans le repère E^p (cf. figure 3.8), la flexion τ_2^p est comptée positivement lorsque le foil est fléchi vers le bas. En conséquence, si le CFT d'un foil est positif, la torsion induite par le CFT est négative lorsque le foil est fléchi vers le bas. Pour le foil avec une orientation de fibres de $30°$, le CFT (négatif) induit donc une torsion positive (bord d'attaque vers le haut) lorsque le foil est fléchi vers le bas. Pour l'orientation de $-30°$, une torsion négative

est attendue. La valeur absolue du CFT quantifie quant à elle l'intensité du couplage. Le tableau 4.2 montre que les foils avec un pli d'UD orienté a ±30° ont les CFT les plus importants. Dans un problème en IFS, ce type de comportement élastique peut être exploité pour générer des ailes stables où instables. Une aile stable voit son incidence diminuer lorsqu'elle se fléchit, ce qui permet de décharger l'aile en cas d'augmentation brusque de la vitesse de l'écoulement. Ce type de comportement est observé dans les essais en bassin (cf. section 4.2). Dans les sections suivantes du manuscrit, la réponse élastique des foils est étudiée numériquement et expérimentalement. Les résultats obtenus permettent de valider le comportement structurel des différents foils prédit dans cette section. Dans le repère imposé par Abaqus^{TM}, retenu pour la présentation des résultats expérimentaux, une valeur de déplacement vertical négative Dy est associée à une rotation de flexion Rx positive. Dans ce repère, un CFT positif ($K_{45}^{cs} > 0$) induit une torsion négative lorsque le foil est fléchi vers le bas. Réciproquement, une torsion positive tend à réduire la rotation de flexion d'un foil fléchi vers le bas avec un CFT positif.

4.1.3 Déformation globale

Cette section présente les résultats obtenus avec le GOM-SCAN puis les confronte aux prédictions des modèles numériques *Abaqus 3D* et *Abaqus 1D*. Pour rappel, les résultats obtenus avec le GOM-SCAN caractérisent la déformation globale du foil. Cette section se décompose en deux parties, une première où les 4 foils sont étudiés pour 4 cas de chargement différents, l'objectif étant de capter et valider l'influence de l'orientation des fibres sur la réponse du foil. Dans un second temps, seuls les foils avec l'orientation de ±30° sont considérés et des cas de chargement sont définis pour explorer l'influence d'une sollicitation en torsion sur la flexion du foil, ce qui permet d'évaluer la modélisation numérique du couplage flexion-torsion.

Influence de l'orientation des fibres

Pour valider la capacité des modèles numériques à capter l'influence de l'orientation du pli d'UD sur la réponse du foil, le déplacement du coin du carcan est mesuré expérimentalement et numériquement pour chaque foil et pour 4 cas de chargements, détaillés dans le tableau 4.3, où l'origine du repère est placée au bord d'attaque du foil à l'encastrement et son orientation est rappelée dans les figures 3.6 et 3.14. Les résultats présentés ici sont obtenus sans prise en compte du gauchissement et il est important de rappeler que les

valeurs de déplacements et de rotations sont données par rapport à une configuration de référence où le carcan est installé sur le foil mais aucune masse n'y est suspendue.

Chargement	$X_l(m)$	$Z_l(m)$	$m_s(kg)$
1	0.1	0.5	5
2	-0.6	0.5	5
3	0.1	1.0	5
4	-0.6	1.0	5

TABLE 4.3 – Cas de chargement retenus pour étudier l'influence de l'orientation du pli d'UD des foils sur leur comportement mécanique.

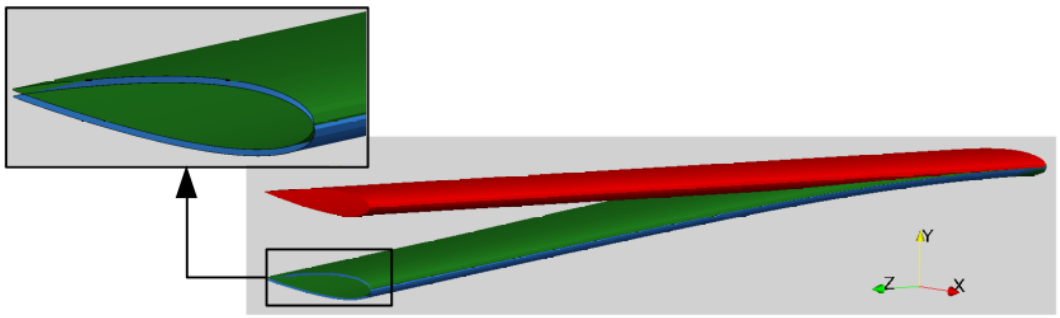


FIGURE 4.1 – Géométries 3D déformées du foil avec l'orientation d'UD de $-50°$ obtenues numériquement pour le chargement 4 – (●) : Foil non déformé, (●) : *Abaqus 1D*, (●) : *Abaqus 3D*.

La figure 4.1 illustre la déformation du foil le plus souple pour le chargement 4. Cela permet d'illustrer l'amplitude de déformation que les foils prennent durant les essais expérimentaux. Les géométries déformées prédites avec *Abaqus 3D* et *Abaqus 1D* sont presque superposées, ce qui illustre qualitativement la cohérence entre les résultats obtenus avec les deux modèles numériques. Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 présentent respectivement le déplacement vertical Dy, la rotation selon $\boldsymbol{X}$ Rx (analogue à la courbure en flexion) et la rotation selon $\boldsymbol{Z}$ Rz(analogue à la torsion) des foils étudiés pour les 4 cas de chargement. Les cas de chargement manquants dans les figures 4.2, 4.3 et 4.4 sont dus à des problèmes rencontrés durant les manipulations expérimentales.

Les résultats montrent un bon accord entre les 3 modèles. Par exemple, le déplacement Dy obtenu avec les 3 modèles pour le chargement 3 (en jaune dans la figure 4.2) est

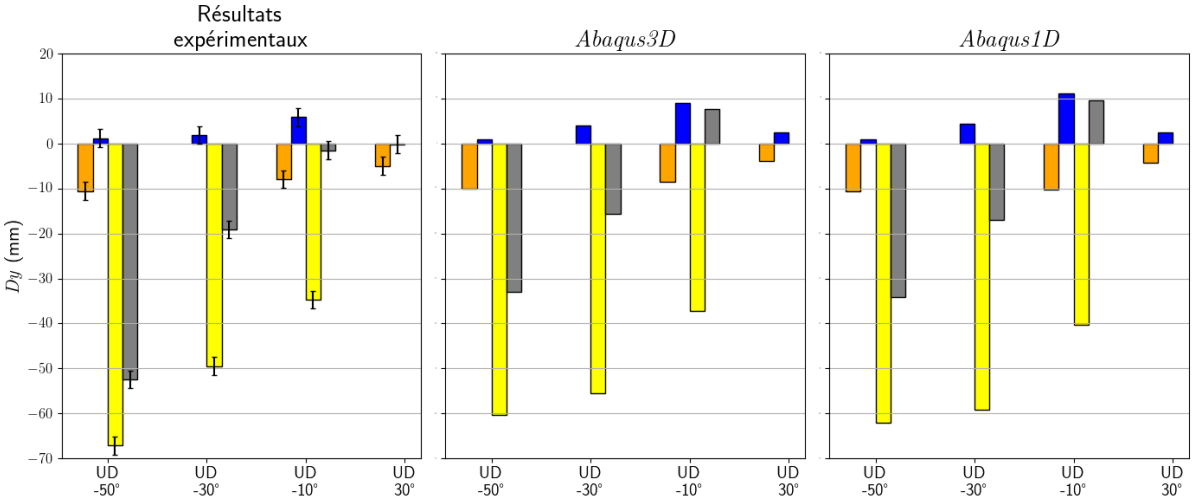


FIGURE 4.2 – Déplacement vertical Dy du coin du carcan mesuré pour les 4 foils et les 4 chargements – (●) : Chargement 1, (●) : Chargement 2, (●) : Chargement 3, (●) : Chargement 4.

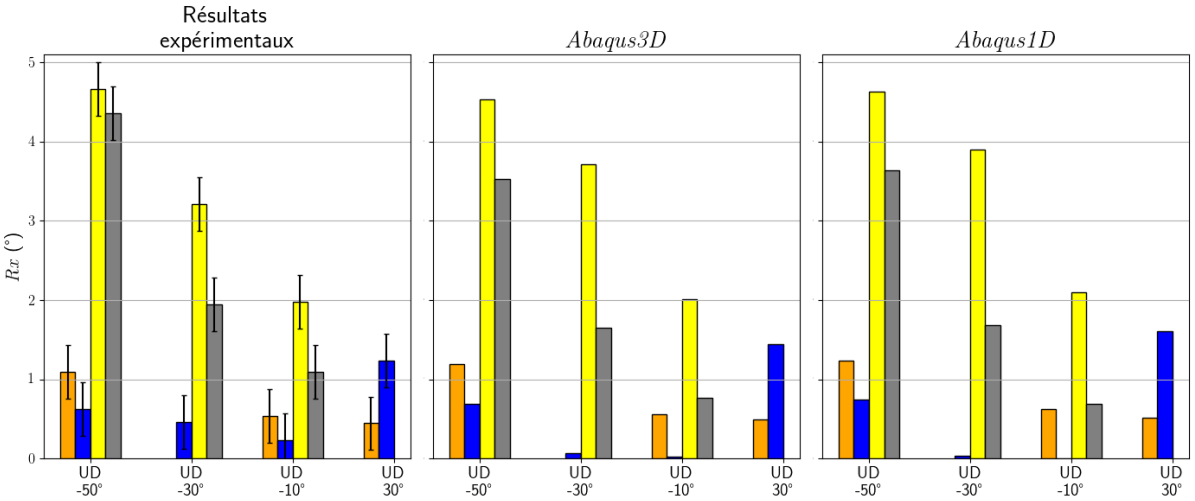


FIGURE 4.3 – Rotation de flexion Rx du coin du carcan mesurée pour les 4 foils et les 4 chargements – (●) : Chargement 1, (●) : Chargement 2, (●) : Chargement 3, (●) : Chargement 4.

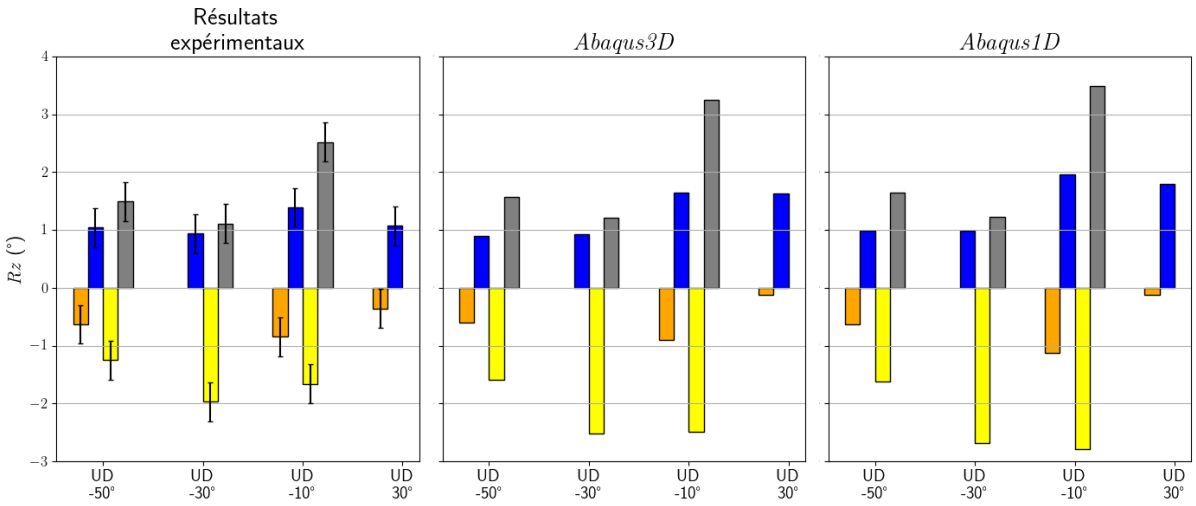


FIGURE 4.4 – Rotation de torsion Rz du coin du carcan mesurée pour les 4 foils et les 4 chargements – (●) : Chargement 1, (●) : Chargement 2, (●) : Chargement 3, (●) : Chargement 4.

maximal pour l'orientation d'UD de $-50°$ et minimal pour l'orientation de $-10°$. Cette observation est cohérente avec les valeurs des raideurs en flexion présentées dans le tableau 4.2 de la section précédente. Pour le chargement 2, un déplacement vertical positif du coin du carcan est mesuré, ce qui est du à une torsion positive ($Rz > 0$ dans la figure 4.4) des foils qui tend à surélever le coin du carcan placé en amont du bord d'attaque. Pour l'orientation de $-10°$, la figure 4.2 montre que le déplacement vertical calculé expérimentalement pour le chargement 4 est négatif alors qu'il est positif dans les prédictions des modèles numériques. Cela est du à la torsion mesurée expérimentalement qui est inférieure aux torsions estimées numériquement (voir Chargement 4 pour l'orientation de $-10°$ dans la figure 4.4). En conséquence, le déplacement induit par la torsion est plus faible dans les résultats expérimentaux. Les modèles numériques prédisent correctement la rotation en flexion Rx mesurée expérimentalement. Par exemple, la figure 4.3 montre que Rx diminue lorsque l'orientation des fibres tend vers 0°. Ce résultat est vérifié par les 3 modèles et montre que la flexion du foil est bien prédite par les modèles numériques pour les différentes orientations de plis considérées. La torsion estimée numériquement est également proche des résultats expérimentaux. La figure 4.4 montre que les chargements 1 et 3 (où la masse est suspendue devant le bord d'attaque) génèrent une torsion négative alors que les chargements 2 et 4 (où la masse est suspendue derrière le bord de

fuite) induisent une torsion positive. Ce résultat est attendu et obtenu pour les 3 séries de mesures. Les angles de torsion obtenus avec les 3 modèles sont également très proches, avec une différence maximale atteinte pour le chargement 3 avec l'orientation d'UD de $-10°$ (cf. figure 4.4). Les figures 4.3 et 4.4 montrent que la différence entre les expériences et les modèles numériques est maximale pour les chargements 3 et 4, où la rotation de flexion des foils est la plus importante. En conséquence, les différences sur les valeurs de torsion sont attribuées à la modélisation du couplage flexion-torsion qui ne représente pas parfaitement le comportement mécanique des foils étudiés expérimentalement. Les résultats présentés dans cette section montrent que le modèle de poutre équivalente est capable de modéliser le comportement de foils en composite pour différentes orientations d'UD. De plus, la torsion du foil est correctement prédite, ce qui est encourageant pour la mise en place de simulation IFS avec le modèle de poutre équivalente.

Influence de la torsion sur la flexion

Une modélisation correcte du couplage flexion-torsion est indispensable pour utiliser le modèle de poutre dans un couplage IFS. C'est pourquoi 2 cas avec une orientation de pli d'UD de $\pm 30°$ sont étudiés. Le premier avec une sollicitation en flexion fixe et le second avec une sollicitation en torsion variable. L'objectif ici est de capter l'influence de la torsion sur la flexion prise par les foils. Pour ce faire, 10 cas de chargements sont considérés où une masse de 5 kg est suspendue au carcan. La position du carcan le long de l'envergure du foil (Z_l) est fixée à 0.8 m de l'encastrement. La position de la masse le long du carcan (X_l) varie quant à elle entre -0.7 m et 0.2 m avec un pas de 10 cm. Dans ces conditions, la sollicitation en flexion du foil est fixe et la variable est donc la sollicitation en torsion, pilotée par la position de la masse selon la corde du foil. Par exemple, une masse positionnée en amont du bord d'attaque du foil ($X_l > 0$) induit une torsion Rz négative alors qu'à l'inverse, une masse placée derrière le bord de fuite du foil ($X_l < 0.25m$) induit une torsion Rz positive.

En raison de la présence d'un couplage flexion-torsion dans les foils, les torsions induites par les différents cas de chargements impactent directement la flexion du foil. Cet impact est également fonction de l'orientation des fibres. L'objectif de cette section est de capter les différents comportements en flexion des foils pour des orientations d'UD opposées, afin de valider la modélisation numérique du couplage flexion-torsion. Comme précédemment, les valeurs d'intérêts sont les déplacements et rotations du carcan Dy, Rx et Rz, rassemblées dans la figure 4.5 pour les 10 cas de chargements considérés et

les deux orientations d'UD. Dans cette figure, les bords d'attaque et de fuite du foil sont représentés par des lignes verticales noires pour facilement visualiser la position de la masse le long du carcan. On rappelle que les déplacements sont exprimés par rapport à une configuration de référence où le carcan est installé sur le foil sans masse suspendue.

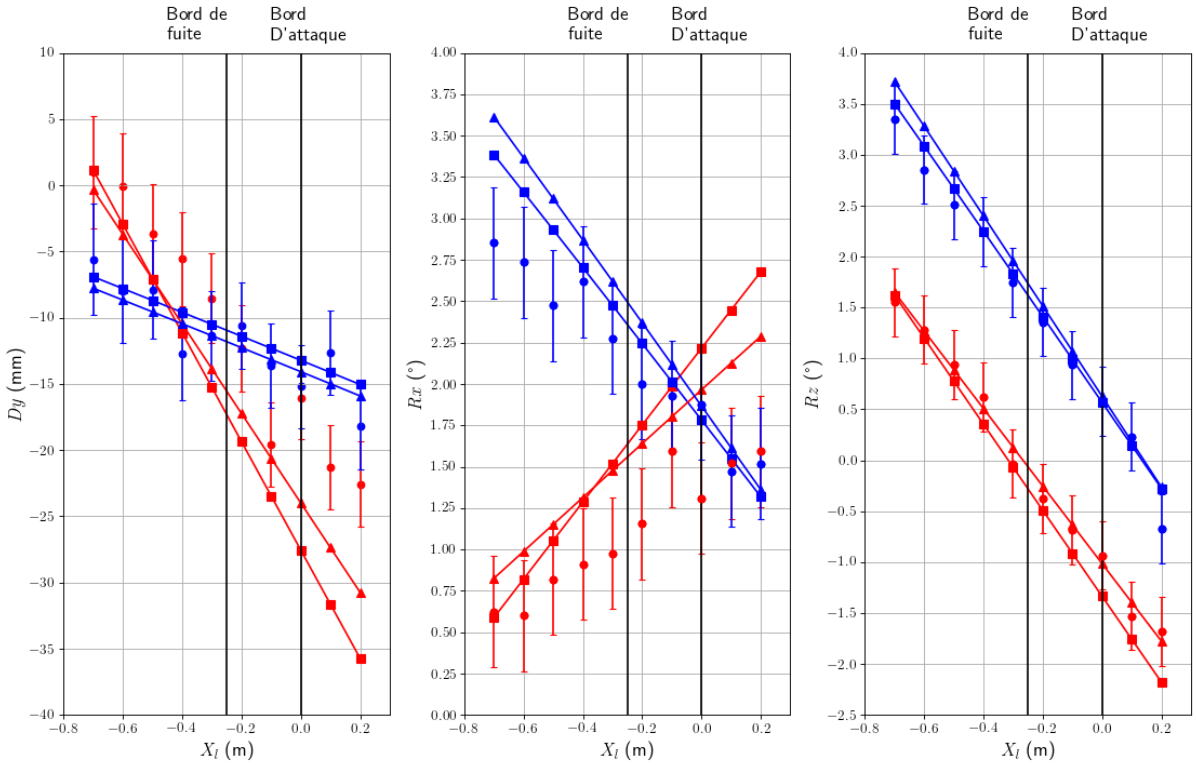


FIGURE 4.5 – Déplacement et rotation du coin du carcan mesurés pour différentes positions de la masse selon la corde à une distance $Z = 0.8$ m de l'encastrement, pour les orientation d'UD de $-30°$ et $30°$ – (▲) : *Abaqus 1D* $-30°$, (▲) : *Abaqus 1D* $30°$, (■) : *Abaqus 3D* $-30°$, (■) : *Abaqus 3D* $30°$, (●) : *Expérimental* $30°$, (●) : *Expérimental* $-30°$.

Les résultats montrent un bon accord entre les torsions mesurées par les 3 modèles, en terme de tendances et de magnitude. Pour les deux orientations d'UD, la torsion diminue lorsque la masse suspendue est déplacée vers le bord d'attaque du foil. Ce comportement est attendu et montre la capacité du modèle de poutre à prédire la torsion prise par le foil pour différentes sollicitation en torsion. Comme les orientations d'UD sont opposées pour les deux foils étudiés, l'impact de la torsion sur la flexion est différent. Dans le repère considéré (cf. section 4.1.2), un déplacement vertical négatif est associé à une rotation de flexion positive. La figure 4.5 montre des tendances différentes de la rotation

en flexion pour les deux orientations d'UD considérées. Pour l'orientation d'UD de $-30°$, Rx diminue quand la masse est déplacée vers le bord de fuite alors que l'inverse est observé pour l'orientation de 30°. Cette tendance, observée avec les trois modèles, montre que le couplage flexion torsion du foil avec une orientation de $-30°$ réduit la flexion du foil quand la sollicitation en torsion diminue. Ces résultats sont en accord avec la discussion des termes de raideurs équivalentes réalisée dans la section 4.1.2.

Les différences numériques-expérimentales observées sur la flèche Dy et la flexion Rx sont supérieures à celles sur la torsion Rz. Une partie de ces différences est attribuée à l'incertitude des mesures expérimentales. Cependant, les tendances de la flèche et de la flexion sont similaires entre les 3 modèles. Lorsque la masse suspendue au foil avec une orientation d'UD de $-30°$ est décalée vers le bord d'attaque, le déplacement Dy diminue plus rapidement que pour le foil avec une orientation d'UD de 30°. Ce résultat est cohérent avec les valeurs de la rotation en flexion Rx car pour l'orientation de $-30°$, Rx augmente quand la masse est déplacée vers le bord d'attaque, et inversement pour l'orientation de 30°.

La figure 4.5 montre que pour une orientation d'UD de 30°, la torsion du foil reste positive quand la masse est fixée en amont du bord d'attaque ($X = 0.0$ m et $X = 0.1$ m). Ce résultat paraît contre intuitif au vu du cas de chargement considéré. En effet, ce phénomène est du au couplage flexion-torsion qui induit une torsion positive en présence d'une rotation de flexion positive pour l'orientation d'UD de 30°. Cela signifie que pour une flexion suffisante, la torsion induite par le couplage flexion-torsion est plus importante à la torsion induite par le chargement. La différence sensiblement constante entre les valeurs de Rz dans la figure 4.5 est attribuée à la part de torsion induite par la flexion du foil et le couplage flexion-torsion. Ces résultats montrent que le modèle de poutre équivalente modélise correctement le couplage flexion-torsion pour des foils présentant des orientations de fibres opposées.

4.1.4 Déformation locale

Les résultats obtenus avec le GOM 5M (cf. section 2.2) permettent de capturer des phénomènes locaux de déformations des foils. Les modèles numériques sont confrontés aux résultats expérimentaux pour juger de la capacité du modèle de poutre équivalente à modéliser correctement les déformations locales des foils. La surface où les déformations sont étudiées est proche de l'encastrement et donc soumise à d'importantes déformations, susceptibles de gauchir significativement les sections du foil. La reconstruction de la géo-

métrie 3D du foil dans le modèle *Abaqus 1D* est alors réalisée en prenant en compte le gauchissement. Cela signifie que le déplacement des points de la géométrie 3D est décomposé en deux contributions, une première calculée en extrapolant les déplacements nodaux des éléments poutres et une seconde obtenue en reconstruisant les sections gauchies.

Les résultats expérimentaux obtenus avec le GOM 5M sont difficiles à post-traiter car les déplacements mesurés sont de l'ordre de 0.01 mm. À cette échelle, une petite erreur de manipulation peut facilement invalider une mesure. Les meilleurs résultats donnés par le GOM 5M sont obtenus pour le foil ayant un pli d'UD orienté à $-30°$, qui est donc le seul foil considéré dans cette section. De la même manière que précédemment, les déplacements sont mesurés relativement à une configuration où le carcan est installé sur le foil mais aucune masse n'y est suspendue, cela permet de réduire les incertitudes causées par l'installation du carcan.

Pour l'orientation d'UD de $-30°$, la différence de déplacement selon l'envergure Dz mesurée en $Z = 0.27$ et $Z = 0.35$ m (cf. figure 2.7) est étudiée pour deux cas de chargement. Les chargements retenus, explicités ci-dessous, sont choisis de manière à maximiser les déformations du foil au niveau du mouchetis.

Chargement	$X_l(m)$	$Z_l(m)$	$m_s(kg)$
1	-0.7	0.8	5
2	0.2	0.8	5

TABLE 4.4 – Cas de chargement retenus pour étudier les déformations locales proche de l'encastrement du foil avec une orientation de fibres de $-30°$.

Les figures 4.6 et 4.7 présentent le déplacement relatif Dz obtenu pour les chargements 1 et 2. Ces figures montrent des résultats cohérents pour les deux cas de chargement retenus. En effet, l'ordre de grandeur des déplacements est bien capté par les modèles numériques. La magnitude du déplacement pour le chargement 1 est 4 fois supérieure au déplacement obtenu pour le premier cas de chargement, ce qui est attendu au vu des résultats présentés dans la section 4.1.3. En effet, la figure 4.5 montre que la rotation en flexion Rx est plus petite pour $X_l = -0.7$ m que pour $X_l = 0.2$ m, dans le cas ou le pli d'UD du foil est orienté à $-30°$. Or, une plus grande rotation en flexion se traduit par un déplacement selon l'envergure des points de la face supérieure du foil plus important.

Dans la figure 4.7, les variations de déplacement Dz selon l'envergure obtenues avec les trois modèles sont similaires, une diminution de Dz intervient à proximité du bord d'attaque du foil ($X = 0$). Il est compliqué d'identifier précisément les sources de différences

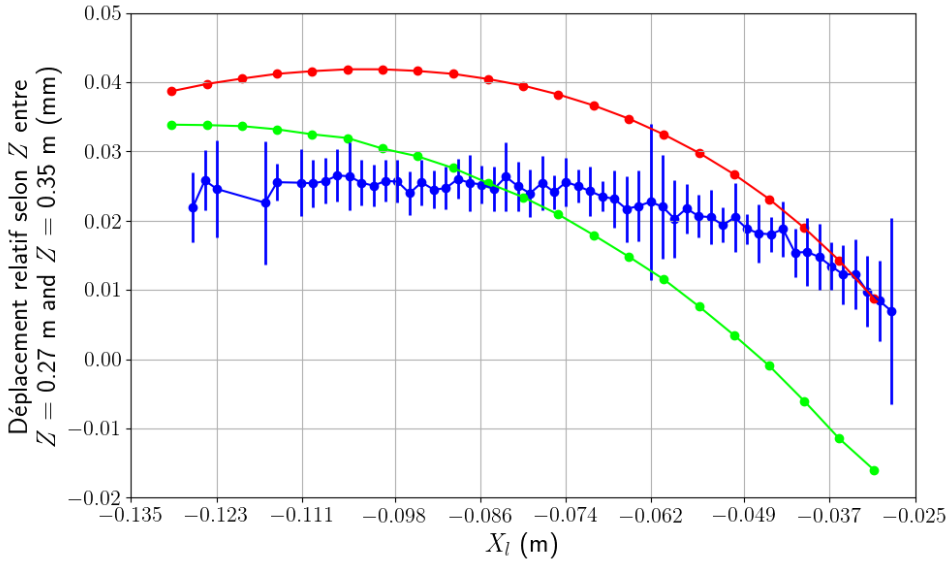


FIGURE 4.6 – Déplacement relatif selon l'envergure mesuré expérimentalement et numériquement entre $Z = 0.35$ m et $Z = 0.27$ m, pour une masse de 5 kg suspendue à $(-0.7, 0.0, 0.8)$ m – (●) : *Expérimental*, (●) : *Abaqus 1D*, (●) : *Abaqus 3D*.

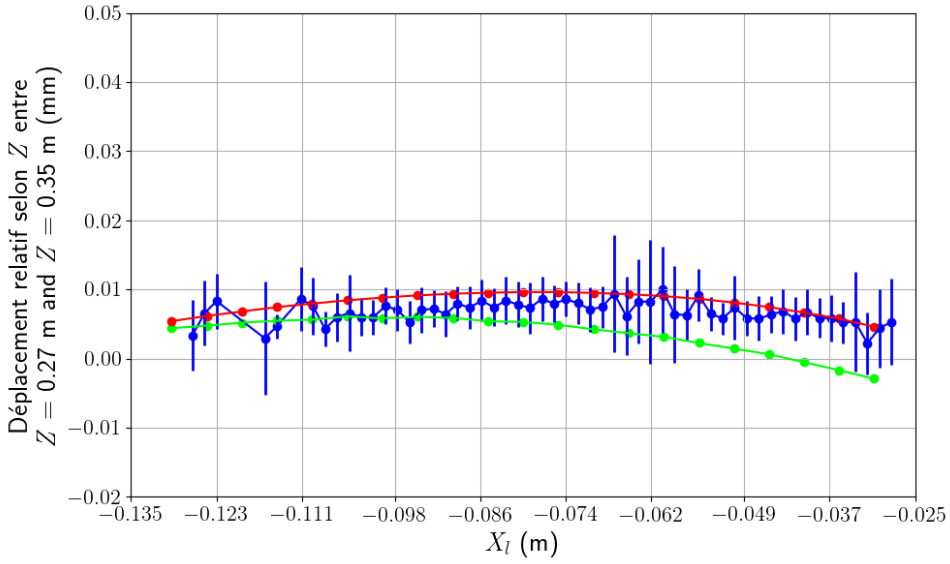


FIGURE 4.7 – Déplacement relatif selon l'envergure mesuré expérimentalement et numériquement entre $Z = 0.35$ m et $Z = 0.27$ m, pour une masse de 5kg suspendue à $(0.2, 0.0, 0.8)$ m– (●) : *Expérimental*, (●) : *Abaqus 1D*, (●) : *Abaqus 3D*.

entre les résultats expérimentaux et numériques car beaucoup de paramètres du problème restent incertains (vraie forme du foil, propriétés mécaniques des matériaux, défauts de fabrication, etc.) Cependant, la précision du modèle *Abaqus 1D* est jugée suffisante en terme de tendance et de magnitude pour valider le modèle de poutre équivalente pour prédire la réponse élastique d'un foil en composite.

4.1.5 Gauchissement des sections

Afin d'évaluer l'impact de la prise en compte du gauchissement sur les résultats numériques, il est pertinent de comparer le gauchissement des sections obtenus numériquement avec les modèles *Abaqus 1D* et *Abaqus 3D*. Une comparaison avec des résultats expérimentaux n'est pas possible car l'ordre de grandeur du gauchissement est similaire à celui des incertitudes sur la mesure du GOM 5M. Cette section présente donc des résultats purement numériques.

Pour lire facilement les résultats, seuls les foils avec une orientation d'UD de $\pm 30°$ sont considérés. Le gauchissement des sections est étudié proche de l'encastrement ($Z = 0.27$ m) où le gauchissement est le plus marqué. Le cas de chargement retenu pour cette étude est une masse de 5 kg suspendue au carcan aux coordonnées $(0.2, 0.0, 0.8)$ m. Le gauchissement est uniquement étudié sur la face supérieure du foil, ce qui est acceptable en raison de la symétrie de sa géométrie.

Pour extraire le gauchissement d'une section dans le modèle *Abaqus 3D*, le déplacement de la section étudiée est séparée en une composante de mouvement de corps rigide et une composante de gauchissement pure. La première étape de cette décomposition consiste à identifier la position du centre de cisaillement de la section dans le maillage 3D déformé et non déformé, ce qui permet d'obtenir la translation de corps rigide de la section. Ensuite, la section déformée est transportée sur la section non déformée. La rotation de corps rigide est ensuite déterminée comme la rotation minimisant la distance entre les points des sections déformées et non déformées, en utilisant la méthode des moindres carrés. Finalement, les déplacements résiduels sont identifiés comme étant le gauchissement de la section

L'allure des sections gauchies dans le modèle *Abaqus 1D* est prédite par Abaqus$^{\text{TM}}$ à l'aide des fonctions de gauchissement avec une méthode analogue à celle présentée dans la section 3.3.1. Les figures 4.8, 4.9 et 4.10 présentent les 3 composantes du champ de gauchissement de la section, il est qualifié de relatif dans les figures car il est exprimé relativement à la magnitude du mouvement rigide de la section.

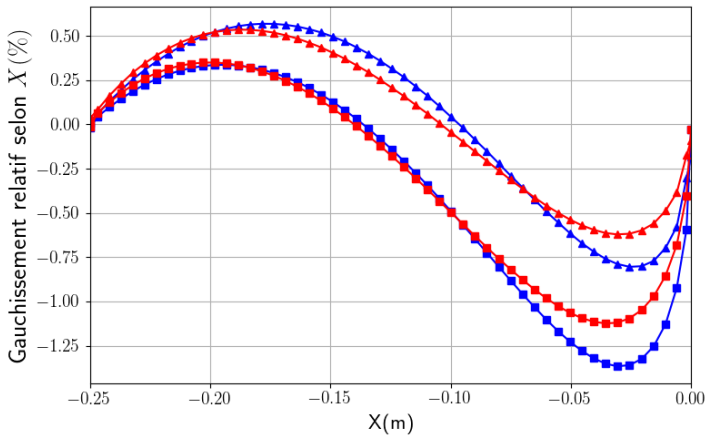


FIGURE 4.8 – Composante du gauchissement selon X d'une section définie à $Z = 0.27m$ pour une masse suspendue aux coordonnées $(0.2, 0.0, 0.8)m$ – (▲) : *Abaqus 1D* $-30°$, (▲) : *Abaqus 1D* $30°$, (■) : *Abaqus 3D* $-30°$, (■) : *Abaqus 3D* $30°$.

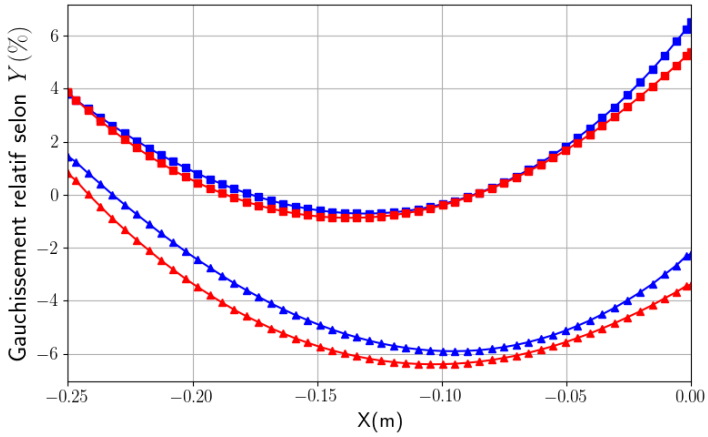


FIGURE 4.9 – Composante du gauchissement selon Y d'une section définie à $Z = 0.27m$ pour une masse suspendue aux coordonnées $(0.2, 0.0, 0.8)m$ – (▲) : *Abaqus 1D* $-30°$, (▲) : *Abaqus 1D* $30°$, (■) : *Abaqus 3D* $-30°$, (■) : *Abaqus 3D* $30°$.

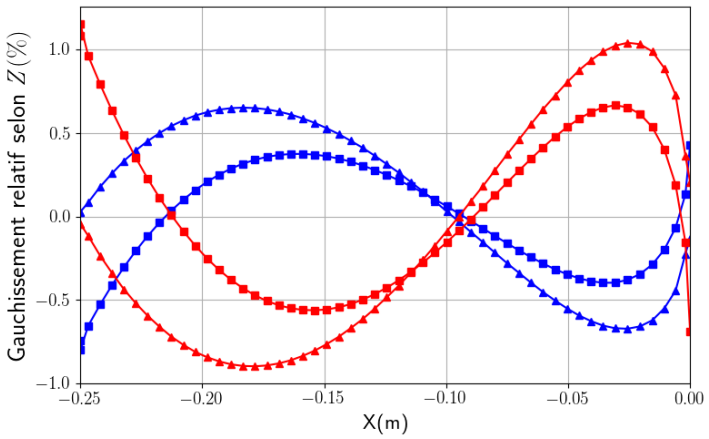


FIGURE 4.10 – Composante du gauchissement selon Z d'une section définie à $Z = 0.27m$ pour une masse suspendue aux coordonnées $(0.2, 0.0, 0.8)m$ – (▲) : *Abaqus 1D* $-30°$, (▲) : *Abaqus 1D* $30°$, (■) : *Abaqus 3D* $-30°$, (■) : *Abaqus 3D* $30°$.

La figure 4.10 montre le gauchissement hors plan d'une section des foils avec une orientation d'UD de $\pm 30°$. Le signe du gauchissement est différent entre les deux foils, ce qui est attendu en raison de leurs orientations des fibres opposées. Cependant, l'amplitude du gauchissement est surestimée par le modèle *Abaqus 1D*, ce qui peut s'expliquer avec les différences entre les deux modèles numériques illustrées dans les figures 4.6 et 4.7.

La figure 4.8 montre un bon accord entre les tendances du gauchissement selon X calculées avec les modèles *Abaqus 1D* et *Abaqus 3D*. En effet, le point où le gauchissement hors plan est nul est le même pour les deux foils.

Les deux modèles prédisent un gauchissement maximal représentant 1.2% de la magnitude du mouvement de corps rigide, ce qui est considéré négligeable. Ce n'est pas le cas pour le gauchissement selon Y. En effet, la figure 4.9 montre un gauchissement maximal prédit de 6% pour *Abaqus 1D* et *Abaqus 3D*. Les différences entre les les composantes du gauchissement selon Y sont inhérentes aux modèles. Comme les non-linéarités géométriques sont prises en compte dans le modèle *Abaqus 3D*, les efforts internes des éléments coques 2D impactent la rigidité en flexion du foil. Un élément coque étiré voit sa raideur hors-plan diminuer (J. N. REDDY 2006). Pour les foils considérés, la peau en composite est assimilable à une plaque encastrée élastiquement sur l'âme en mousse. Le gauchissement est étudié sur la face supérieure des foils, étirée selon l'envergure du foil (X) par la masse suspendue. En conséquence, la magnitude du déplacement selon Y (flexion hors plan) est réduite. Ce phénomène n'est pas capté dans le modèle *Abaqus 1D* où l'analyse de section

est réalisée en considérant un gauchissement plus faible que le mouvement de corps de rigide. Ce qui explique la différence de magnitude du gauchissement selon Y prédit par les deux modèles.

Les résultats présentés dans cette section montrent que le gauchissement des sections n'est pas négligeable par rapport à la magnitude du mouvement de corps rigide des sections. Le gauchissement prédit par le modèle *Abaqus 1D* est surestimé par rapport au modèle *Abaqus 3D*. Cependant, la tendance du gauchissement est bien modélisée dans *Abaqus 1D*.

4.1.6 Influence du rapport d'aspect

Pour utiliser le modèle de poutre équivalente, la structure à étudier doit être suffisamment allongée, sinon les hypothèses permettant la mise en place du modèle *Abaqus 1D* ne sont plus valides. Le rapport d'aspect (RA) est défini comme le rapport entre l'envergure et la corde du foil. En pratique, les foileurs présentant les plus petits RA sont les wingfoil, où ce ratio peut descendre à 4. Les foils étudiés dans les sections précédentes ont un RA de 5.5.

Dans cette section, une comparaison des modèles numériques est réalisée pour des RA variant de 4 à 11. Pour chaque RA, la déformation d'un foil avec une orientation d'UD de $-50°$ est étudiée lorsqu'une masse est suspendue à son extrémité. Le chargement est appliqué de la même manière que précédemment sauf qu'ici, la masse du carcan est négligée. La masse suspendue à l'extrémité du foil est placée 0.6 m derrière le bord de fuite afin de générer une torsion significative. Afin d'avoir des amplitudes de flexion comparables pour les différents RA, la masse est définie en fonction de la longueur du foil. Pour ce faire, la formule de la flèche d'une poutre homogène encastrée soumis à un effort ponctuel de magnitude F à son extrémité est considérée.

$$Dy_{max} = \frac{FL^3}{3\langle EI \rangle} \tag{4.3}$$

Dans l'équation (4.3), Dy_{max} est la flèche prise par la poutre, L la longueur de la poutre et $\langle EI \rangle$ la raideur en flexion de la poutre. Pour la longueur initiale de 1.375 m, la masse suspendue pèse 5 kg. Pour déterminer les masses associées aux autres RA, l'équation (4.3) est utilisée en considérant $\langle EI \rangle$ et Dy_{max} constants. 4 cas de chargements sont alors définis et explicités dans le tableau 4.5.

RA	L	$X_l(m)$	$Z_l(m)$	$m_s(kg)$
4	1.0	-0.6	0.97	13
5.5	1.375	-0.6	1.345	5
8.75	2.063	-0.6	2.033	1.48
11.0	2.75	-0.6	2.72	0.625

TABLE 4.5 – Cas de chargement retenus pour étudier l'influence du rapport d'aspect sur la validité du modèle de poutre équivalente.

Pour chaque RA considéré, la torsion et le déplacement de l'extrémité du foil prédits avec les deux modèles numériques sont comparés. Les différences relatives correspondantes sont tracées dans la figure 4.11.

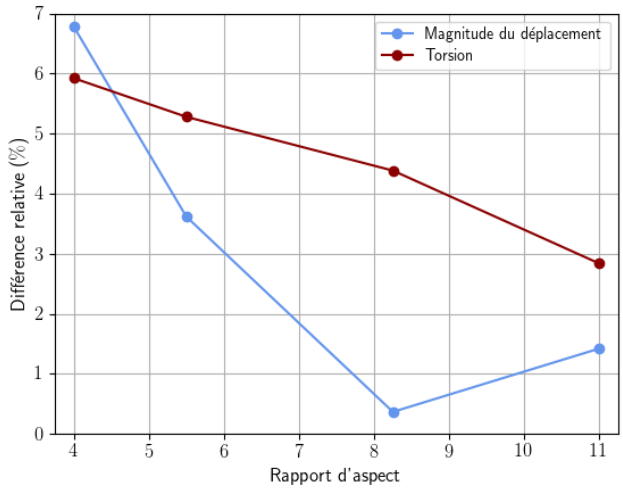


FIGURE 4.11 – Impact du rapport d'aspect sur les différences entre résultats des modèles numériques *Abaqus 1D* et *Abaqus 3D*.

La figure 4.11 montre que les différences entre les modèles augmentent lorsque le RA diminue, ce qui est cohérent avec l'hypothèse formulée dans le modèle de poutre équivalente. Pour des RA supérieurs à 5.5, les différences entre les modèles sont inférieures à 5.5%, ce qui est jugé satisfaisant pour la mise en place d'un couplage IFS basse-fidélité. En pratique, le RA ne descend pas en dessous de 5 car le but de cette thèse est d'étudier des foils qui se déforment, ce qui n'est pas le cas pour des petits RA. Le RA de 5.5 est représentatif des dimensions des foils optimisés dans cette thèse.

4.1.7 Reconstruction des contraintes dans la section

Pour optimiser la structure d'un foil, il est primordial de pouvoir estimer une contrainte maximale afin de ne pas converger vers un optimum non viable. C'est pourquoi une comparaison numérique des contraintes calculées avec les modèles *Abaqus 1D* et *Abaqus 3D* est réalisée dans cette section.

Pour cette étude, le foil le plus souple est retenu (orientation d'UD de $-50°$) en considérant le chargement 4 de la section 4.1.3. Ce qui signifie qu'une masse de $5kg$ est suspendue au carcan (dont la masse n'est pas négligée) aux coordonnées $(-0.6, 0.0, 1.0)$ m. Les contraintes sont calculées au niveau de la section du foil placé à $Z = 0.27$ m de l'encastrement, afin d'avoir des valeurs de contraintes significatives. Les contraintes sont uniquement calculées dans la peau du foil car les contraintes dans l'âme en mousse sont négligeables par rapport à celles de la peau. Pour rester synthétique, cette étude porte uniquement sur la composante axiale des contraintes, orientée selon l'envergure du foil. Les figures 4.12 et 4.13 montrent l'évolution de la contrainte axiale le long de la corde du foil sur sa face supérieure (sollicitée en traction) et sa face inférieure (sollicitée en compression).

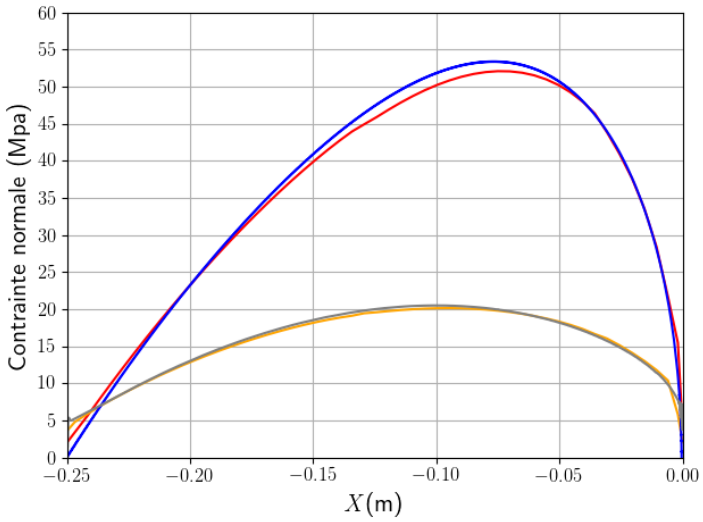


FIGURE 4.12 – Profil numérique de contrainte axiale dans la peau de la face supérieure du foil ayant une orientation d'UD de $-50°$ – (_) : Pli d'UD *Abaqus 3D*, (_) :Pli d'UD *Abaqus 1D*, (_) : Pli de taffetas *Abaqus 3D*, (_) :Pli de taffetas *Abaqus 1D*.

Les résultats montrent que le champ de contraintes reconstruit à partir des résultats du modèle de poutre équivalent est très proche de celui prédit par le modèle *Abaqus 3D*.

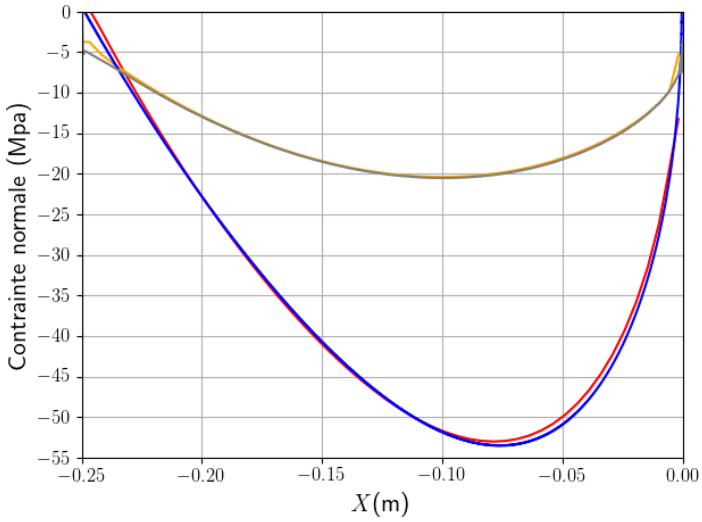


FIGURE 4.13 – Profil numérique de contrainte axiale dans la peau de la face inférieure du foil ayant une orientation d'UD de −50° – (_) : Pli d'UD *Abaqus 3D*, (_) :Pli d'UD *Abaqus 1D*, (_) : Pli de taffetas *Abaqus 3D*, (_) :Pli de taffetas *Abaqus 1D*.

Cela est vrai pour les deux faces du foils. Des différences émergent pour les contraintes axiales dans le pli de taffetas. En effet, dans le modèle *Abaqus 1D*, la contrainte axiale maximum est légèrement supérieure à celle prédite par le modèle *Abaqus 3D*. Cependant, la figure 4.2 montre que pour le chargement 4, le déplacement vertical Dy calculé avec le modèle de poutre équivalent est également supérieur au déplacement estimé par le modèle 3D. Cela explique en partie les différences observées entre les deux modèles dans les figures 4.12 et 4.13. Ces résultats montrent que le modèle *Abaqus 1D* est capable de reconstruire correctement les contraintes dans les sections du foil. Une étape de reconstruction des contraintes pourrait être intégrée dans un processus d'optimisation afin de définir un critère d'intégrité structurelle pour les designs de foils explorés.

4.1.8 Approche modale

Les méthodes de détermination des fréquences et modes propres associées aux modèles *Abaqus 3D* et *Abaqus 1D* sont respectivement abordées dans les sections 3.1.7 et 3.3.2. À partir des matrices de raideurs élastique et des matrices de masse, il est possible de prévoir les fréquences propres de la structure. Ce qui est utile pour anticiper l'apparition de phénomènes de résonance pour une fréquence d'excitation donnée. Les fréquences propres

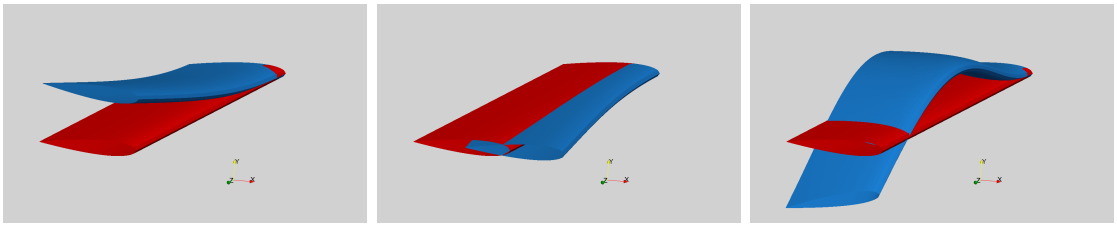
des 4 foils sont calculées à l'aide des modèles *Abaqus 3D* et *Abaqus 1D* et comparés dans le tableau 4.6.

Mode	30°			-10°		
	Abaqus 1D (Hz)	*Abaqus 3D* (Hz)	Diff. (%)	*Abaqus 1D* (Hz)	*Abaqus 3D* (Hz)	Diff. (%)
1	7.01E+00	7.15E+00	-2.01	9.94E+00	1.00E+01	-0.71
2	3.83E+01	3.93E+01	-2.46	5.03E+01	5.09E+01	-1.08
3	4.17E+01	4.31E+01	-3.27	5.26E+01	5.28E+01	-0.41
4	8.33E+01	8.21E+01	1.43	6.38E+01	6.52E+01	-2.12
5	1.09E+02	1.15E+02	-5.26	1.35E+02	1.38E+02	-2.32
Mode	-30°			-50°		
	Abaqus 1D (Hz)	*Abaqus 3D* (Hz)	Diff. (%)	*Abaqus 1D* (Hz)	*Abaqus 3D* (Hz)	Diff. (%)
1	7.18E+00	7.35E+00	-2.31	6.20E+00	6.25E+00	-0.83
2	3.82E+01	3.91E+01	-2.30	3.35E+01	3.37E+01	-0.68
3	4.24E+01	4.40E+01	-3.55	3.75E+01	3.80E+01	-1.39
4	8.26E+01	8.26E+01	-0.05	7.85E+01	7.89E+01	-0.47
5	1.10E+02	1.17E+02	-5.72	1.00E+02	1.02E+02	-2.27

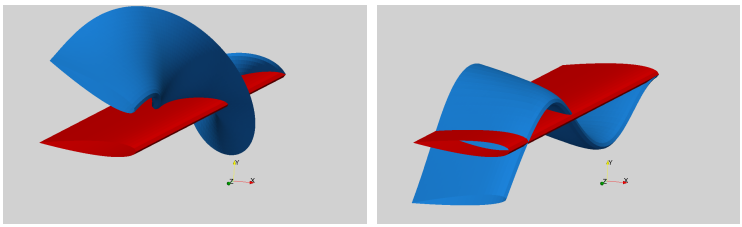
TABLE 4.6 – Comparaison des fréquences propres obtenues avec *Abaqus 1D* et *Abaqus 3D* pour les différentes orientations d'UD.

Les résultats montrent que les différences maximales entre les modèles haute et basse fidélité avoisinent les 5% et sont atteintes pour le mode 5. Cela permet de valider la capacité du modèle *Abaqus 1D* à estimer les fréquences propres d'un foil en composite.

La figure 4.14 illustre les 5 premiers modes propres du foil avec une orientation d'UD de 30°, obtenus avec le modèle *Abaqus 1D*. Il est alors possible d'identifier les modes 1,2,3 et 5 comme des modes de flexion et le mode 4 comme un mode de torsion. On remarque qu'avec les deux modèles numériques, le foil avec l'orientation d'UD de $-10°$ présente des fréquences propres plus élevées pour les modes en flexion plus faible pour le mode de torsion. Ce résultat est en accord avec les propriétés équivalentes des foils (cf. tableau 4.2) où la raideur en flexion est maximale pour l'orientation d'UD de $-10°$ alors que la raideur en torsion est minimale pour cette angle. Cela met en avant la cohérence des valeurs de fréquences propres évaluées par les modèles numériques.



(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3



(d) Mode 4 (e) Mode 5

FIGURE 4.14 – Illustration des 5 premiers modes propres du foil avec une orientation d'UD de 30° – (●) : Foil non déformé, (●) : *Abaqus 1D*.

4.2 Essais en bassin

La section précédente valide la capacité du modèle de poutre équivalente à prédire la déformation de foils présentant des couplages flexion-torsion (CFT) différents soumis à un effort ponctuel. La campagne expérimentale réalisée à l'Ifremer de Boulogne-sur-mer, présentée dans la section 2.3, permet de valider le couplage IFS *PUFFIn/Abaqus 1D*. Seul le foil ayant un pli d'UD orienté à $-30°$ est testé dans le bassin. Le CFT de ce foil le rend instable, ce qui signifie que son angle d'attaque augmente lorsqu'il est déformé par l'écoulement. Dans cette section, l'angle de torsion supplémentaire induit par le CFT, appelé *nose-up twist angle*, est traduit en *angle de torsion de cabrage* dans le manuscrit.

Dans un premier temps, deux études expérimentales du comportement du foil en écoulement sont présentées, afin de valider le dispositif expérimental. Ensuite, les résultats numériques sont confrontés aux résultats expérimentaux. Cette section se termine par une comparaison des résultats obtenus avec le couplage *PUFFIn/Abaqus 1D*.

4.2.1 Polaire du foil

Une polaire du foil est réalisée expérimentalement pour 2 vitesses d'écoulement, $U = 0.8$ m/s et $U = 1.2$ m/s. La profondeur est choisie pour minimiser les effets de surface libre. L'hexapode permet une immersion maximale $h/c = 2.76$, ce qui représente 0.69 m. À

cette profondeur, le foil est à 1.3 m ($h/c = 5.2$) du fond du bassin. Considérant la vitesse maximale de $U = 1.2$ m/s et la distance au fond du bassin, le travail de (Faltinsen 2006) permet de montrer que l'effet du plancher sur le coefficient de portance du foil est négligeable. En conséquence, le fond du bassin n'est pas modélisé dans *PUFFIn*.

Les efforts mesurés par la balance sont donnés par rapport à la configuration où le foil est soumis à sa poussée d'Archimède et son poids. Cela signifie que les efforts mesurés expérimentalement sont représentatifs de la pression dynamique appliquée sur le foil. Dans les modèles numériques, *PUFFIn* calcule l'effort de pression dynamique à la dernière itération de la boucle IFS, ce qui permet de le comparer facilement avec les mesures expérimentales.

De la même manière la torsion et le déplacement vertical du foil mesurés expérimentalement sont relatifs à la déformation initiale du foil due à la poussée d'Archimède et à la gravité. Une prédiction numérique de cette déformation est réalisée pour les différentes configurations testées, afin d'obtenir la même mesure de torsion et de déplacement que les expériences. Les valeurs expérimentales du déplacement de la torsion et de la portance sont présentées pour les deux vitesses d'écoulement dans les figures 4.15 et 4.16.

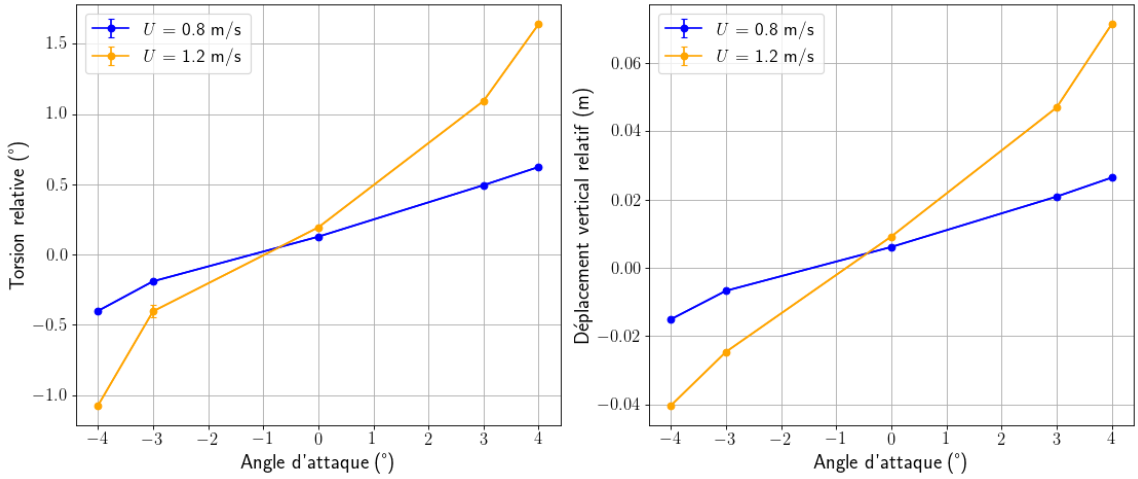


Figure 4.15 – Torsion (gauche) et déplacement vertical (droit) du foil mesurés expérimentalement à une immersion $h/c = 2.76$.

La figure 4.15 montre que pour un angle d'attaque nul, le déplacement et la torsion du foil ne sont pas nuls malgré son profil symétrique, cela est du à la déformation initiale du foil. À cause du CFT, la flexion du foil due à la poussée d'Archimède induit une torsion qui tend à augmenter l'angle d'attaque du foil. En conséquence, pour un angle d'attaque nul,

la flottabilité du foil induit un angle d'attaque positif. Ceci explique également pourquoi les angles pour lesquels les déplacements et la portance sont nuls sont négatifs. Il faut en effet compenser la torsion initiale du foil associée à la poussée d'Archimède.

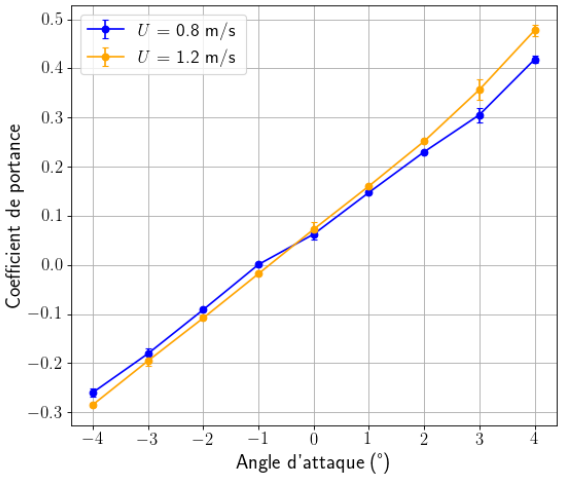


FIGURE 4.16 – Polaire du coefficient de portance du foil évaluée à une immersion $h/c = 2.76$.

La figure 4.16 montre l'impact de *l'angle de torsion de cabrage*, qui tend à augmenter le coefficient de portance du foil lorsqu'il se déforme. Pour mettre ce phénomène en évidence, le rapport entre le coefficient de portance pour l'angle d'attaque de 3° et 4° est comparé au rapport théorique sans *l'angle de torsion de cabrage*.

Sans l'apparition de cet angle, le coefficient de portance du foil est constant lors de sa déformation. De plus, aux faibles incidences, le coefficient de portance varie linéairement avec l'angle d'attaque. La relation entre le déplacement vertical du foil et sa portance est également considérée linéaire. Avec ces considérations, une augmentation de 33% est attendue pour le coefficient de portance lorsque l'angle d'attaque passe de 3° à 4°. Cependant, pour la vitesse d'écoulement $U = 1.2$ m/s, une augmentation de 52% est mesurée, ce qui est dû à *l'angle de torsion de cabrage*, augmentant le coefficient de portance du foil lorsque celui-ci se déforme. Ce phénomène est plus dur à observer pour la vitesse $U = 0.8$ m/s car les efforts hydrodynamiques sont plus faibles dans cette configuration et donc moins susceptibles de déformer le foil.

Dans la figure 4.16, le coefficient de portance est plus important pour la vitesse $U = 1.2$ m/s que pour la vitesse $U = 0.8$ m/s. Comme la portance est plus importante pour la vitesse $U = 1.2$ m/s, le foil est davantage fléchi, induisant alors un *angle de torsion de*

cabrage plus important. Ce phénomène est d'autant plus visible pour les angles d'attaque élevés car ils induisent des déformations plus importantes.

Ces résultats montrent que le foil étudié a bien un CFT le rendant instable, signifiant que sa déformation tend à augmenter son angle d'attaque. Cela valide également la capacité du dispositif expérimental à mesurer les efforts et déformations du foil dans le bassin.

4.2.2 Étude expérimentale de l'influence de l'immersion

Ici, l'influence de l'immersion du foil sur sa portance et sa déformation est étudiée pour un angle d'attaque fixé. Pour maximiser l'amplitude des déformations, l'angle d'attaque retenu est de 4°. Avec l'hexapode, différentes immersions sont testées, définies telles que $h/c = [0.5; 0.75; 1; 2.76]$.

La figure 4.17 montre l'influence de l'immersion du foil sur son coefficient de portance. L'effet de la surface libre sur le foil est fonction de la vitesse. Pour le plus petit nombre de Froude ($U = 0.8$ m/s ; $F_{n1} = 0.51$), le coefficient de portance augmente lorsque l'immersion diminue, jusqu'à une valeur critique $h/c = 1$, correspondant au moment où la vague créée par le foil déferle, ce qui est associé à une crise de portance. Pour le plus grand nombre de Froude ($U = 1.2$ m/s ; $F_{n2} = 0.77$), le coefficient de portance diminue lorsque le foil se rapproche de la surface libre. Comme pour la vitesse de 0.8 m/s, une importante chute de portance intervient quand h/c est inférieur à 1. Cette chute de portance, due au déferlement de la vague de surface induite par le foil, est d'autant plus importante pour la vitesse de 1.2 m/s.

La figure 4.18 caractérise la déformation du foil aux différentes immersions étudiées. Comme dans la section 4.2.1, la torsion et le déplacement vertical du foil ont une tendance similaire, que l'on peut relier à la portance du foil. Les résultats montrent que la déformation du foil loin de la surface libre est plus importante pour la vitesse d'écoulement $U = 1.2$ m/s, ce qui est attendu car les efforts hydrodynamiques sont plus importants dans ce cas. Pour le plus petit nombre de Froude, la figure 4.18 montre que le déplacement vertical du foil est maximal pour $h/c = 1$, ce qui est cohérent avec l'évolution du coefficient de portance présentée dans la figure 4.17. Une observation similaire est réalisée pour le plus grand nombre de Froude, où la déformation du foil est maximum en $h/c = 2.76$ et diminue au fur et à mesure que le foil se rapproche de la surface libre. La figure 4.18 montre également que la chute de portance aux faibles immersions est accompagnée d'une importante réduction de la déformation du foil.

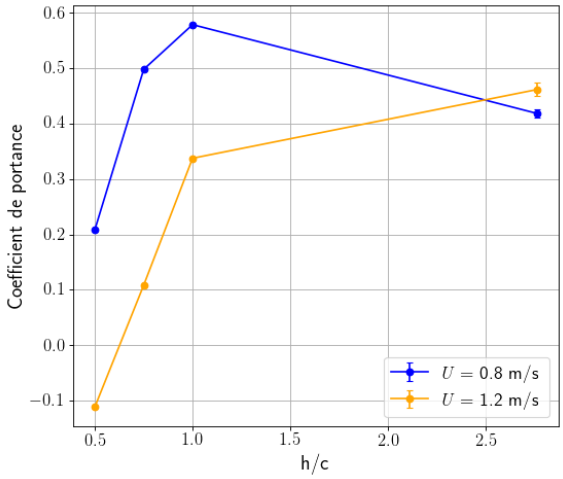


FIGURE 4.17 – Coefficients de portance mesurés expérimentalement à différentes immersions pour un angle d'attaque de 4°.

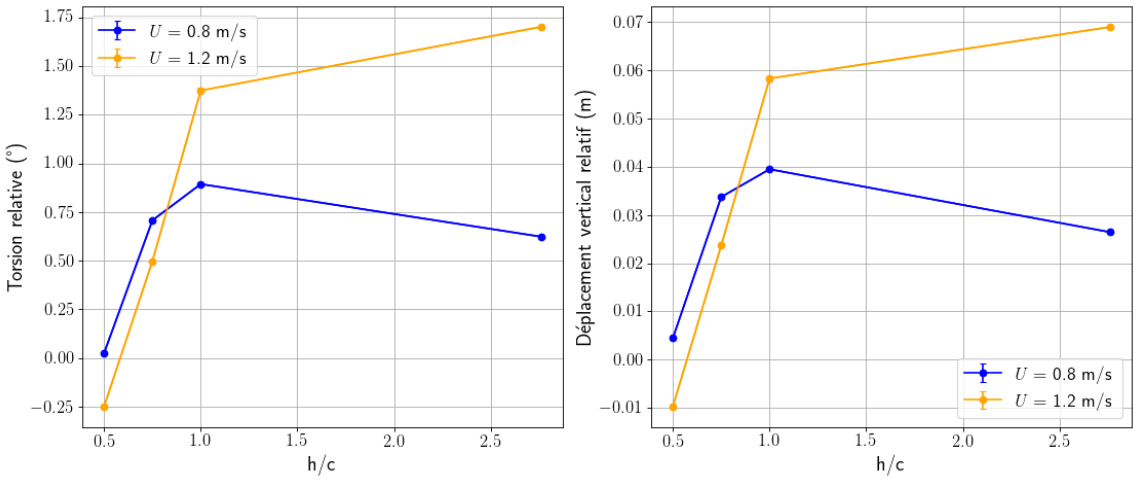


FIGURE 4.18 – Torsion et déplacement vertical mesurés expérimentalement à différentes immersions pour un angle d'attaque de 4°.

Ces résultats expérimentaux montrent que le comportement du foil près de la surface dépend du nombre de Froude. Afin d'identifier la source des différences entre les deux vitesses d'écoulement, la surface libre capturée expérimentalement à la plus faible immersion ($h/c = 0.5$) est illustrée pour les deux nombres de Froude dans la figure 4.19. Dans cette figure, la surface libre modélisée numériquement est également représentée. Cette surface libre est obtenue avec *PUFFIn* en considérant un foil rigide avec une géométrie initialement déformée par la poussée d'Archimède.

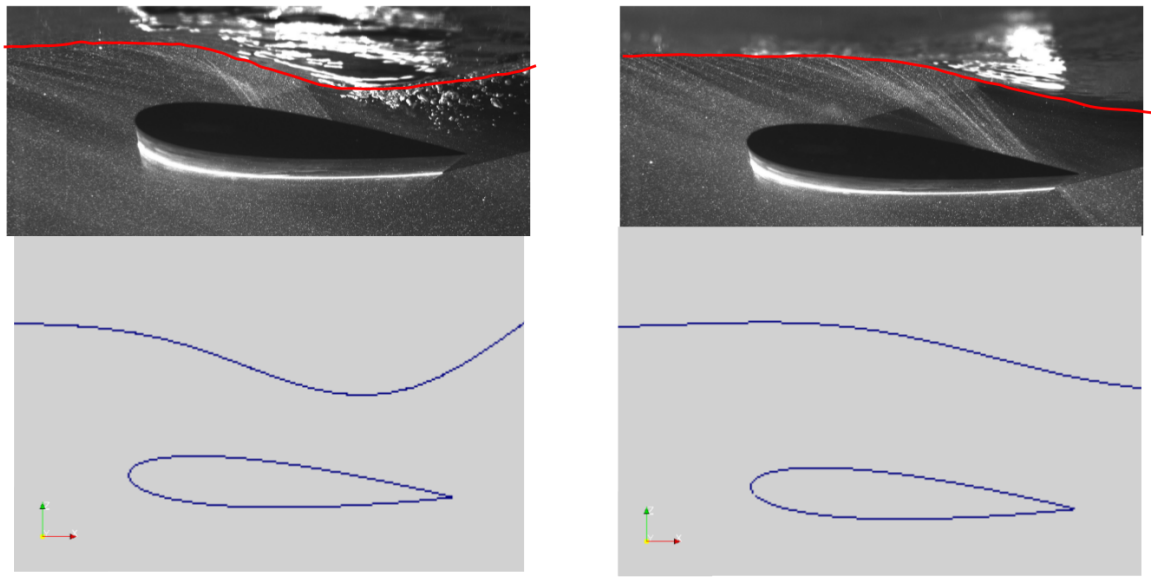


FIGURE 4.19 – Surfaces libres capturées expérimentalement (partie supérieure) et numériquement (partie inférieure) pour une immersion $h/c = 0.5$ et les nombres de Froude $F_{n1} = 0.51$ (gauche) et $F_{n2} = 0.77$ (droite).

Pour le nombre de Froude $F_{n1} = 0.51$, la forme de la surface libre induit une accélération de l'écoulement sur l'extrados du foil, ce qui se traduit par une dépression plus marquée et donc une portance augmentée. Pour le plus grand nombre de Froude ($F_{n2} = 0.77$), la vague de surface induit un ralentissement de l'écoulement et donc une diminution de la dépression sur l'extrados du foil. Ces phénomènes sont attendus au vu des travaux de (USLU et al. 2008) et (XIE et al. 2007). La figure 4.19 montre que *PUFFIn* capture bien les effets de surface libre pour deux nombres de Froude différents, ce qui est encourageant pour la validation des modèles numériques. Les sections 4.2.1 et 4.2.2 valident le dispositif expérimental. Celui-ci est ensuite utilisé pour valider le couplage IFS *PUFFIn/Abaqus 1D* dans la section suivante.

4.2.3 Validation numérique

Dans cette section, les résultats numériques sont confrontés aux résultats expérimentaux. Le foil est testé à l'immersion maximum ($h/c = 2.76$) et une vitesse d'écoulement $U = 0.8$ m/s. Des angles d'attaque allant de $-4°$ à $4°$ sont testés. La figure 4.20 présente les torsions et déplacements verticaux mesurés expérimentalement et numériquement.

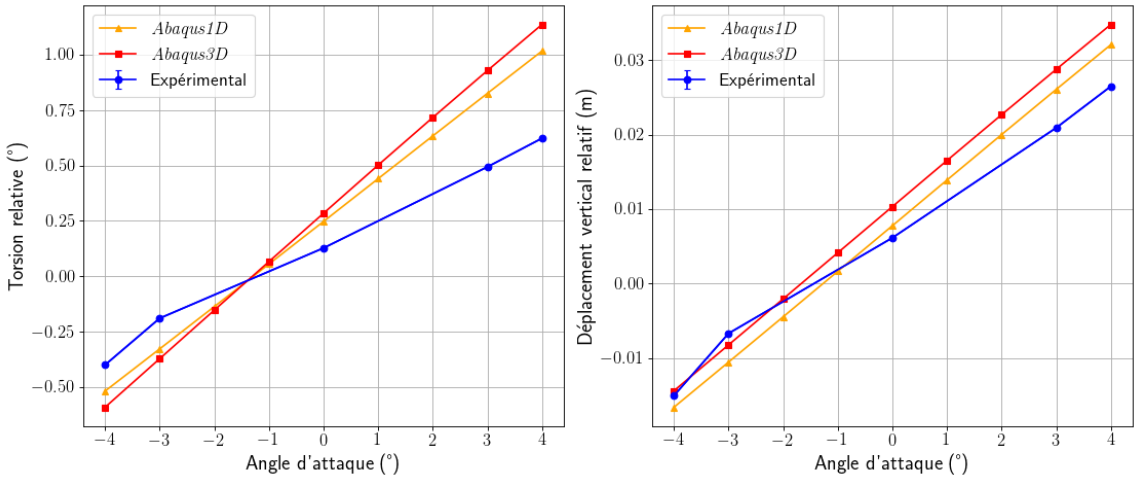


FIGURE 4.20 – Mesures expérimentales et numériques de la torsion (gauche) et du déplacement vertical (droite) du foil à une immersion $h/c = 2.76$ et une vitesse d'écoulement $U = 0.8$ m/s.

Les résultats montrent une bonne concordance entre les modèles numériques. Cela montre que le modèle *Abaqus 1D* donne également des résultats proche de *Abaqus 3D* lorsque le chargement considéré est distribué sur toute la surface du foil. Cependant, les deux modèles numériques surestiment la déformation du foil. La figure 4.20 montre que la différence sur la torsion est supérieure à la différence sur le déplacement vertical. Ce qui peut s'expliquer par une surestimation du CFT dans les modèles numériques. Afin de quantifier la différence sur le CFT expérimental et numérique, la torsion du foil est tracée en fonction du déplacement vertical du foil. Cela donne une courbe linéaire avec une pente proportionnelle au CFT du foil. Cette pente est notée RFT (*Rapport Flexion-Torsion*) dans la suite du manuscrit. Les résultats mettant en évidence la différence sur le RFT sont présentés dans la figure 4.21.

Dans la figure 4.21, la pente mesurée expérimentalement est plus faible que la pente obtenue numériquement. Les valeurs des différents RFT sont rassemblées dans le tableau 4.7.

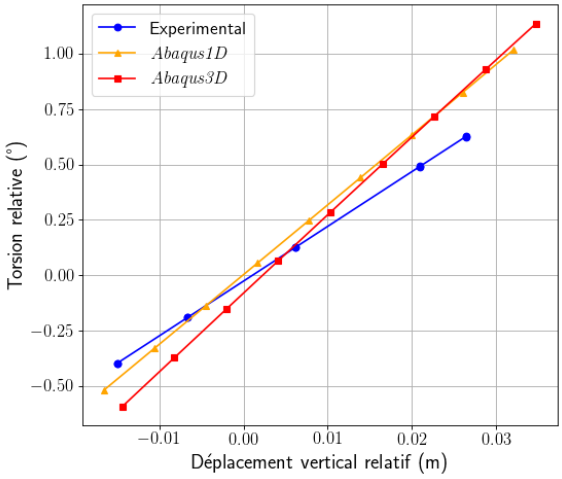


FIGURE 4.21 – Caractérisation expérimentale et numérique du CFT du foil.

Model	RTF(°/m)	$\frac{\text{RTF expérimental}}{\text{RTF}}$
Expérimental	24.7	1.00
Abaqus 3D	31.6	0.78
Abaqus 1D	35.2	0.70

TABLE 4.7 – Caractérisation expérimentale et numérique du CFT.

Le calcul du rapport entre le RFT numérique et expérimental donne une valeur moyenne de 74%. Cette valeur peut être utilisée pour réduire le CFT dans le modèle *Abaqus 1D*. Pour ce faire, le terme K_{46}^{cs} de la matrice de raideur équivalente est multiplié par 0.74. En raison des incertitudes sur la construction du foil, il est possible que l'empilement composite défini durant l'analyse de la section (et dans *Abaqus 3D*) ne correspondent pas parfaitement à la structure réelle. De plus, le terme K_{45}^{cs} de la matrice de section est très sensible aux variations structurelles (orientation de l'UD, modules d'élasticité, etc.) et donc les raideurs équivalentes peuvent être correctement prédites sans que le CFT le soit parfaitement.

La correction du modèle *Abaqus 1D* proposée ici fait sens à condition que la torsion prise par le foil soit induite par le CFT, ce qui est vérifié dans ce qui suit. Les simulations IFS réalisées avec le modèle *Abaqus 1D* sont relancées avec un CFT réduit de 26%. Les nouveaux résultats sur la torsion et le déplacement vertical sont présentés dans la figure 4.22.

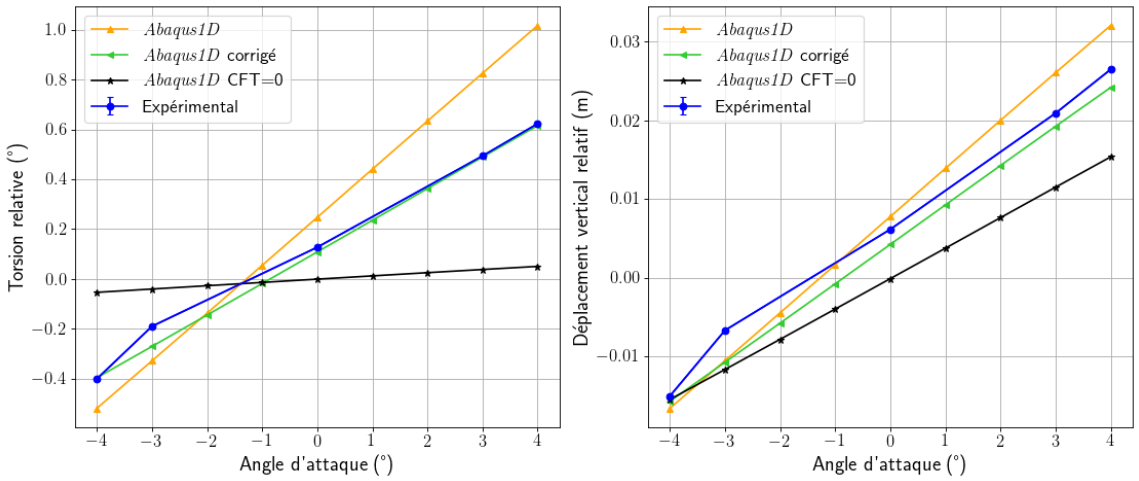


FIGURE 4.22 – Mesures expérimentales et numériques de la torsion (gauche) et du déplacement vertical (droite) du foil à une immersion $h/c = 2.76$ et une vitesse d'écoulement $U = 0.8$ m/s, après correction du CFT.

Dans la partie gauche de la figure 4.22, la torsion prise par le foil en l'absence de CFT est tracée pour les différents angles d'attaque. Les valeurs de torsion sont nettement plus faibles que dans les cas avec du CFT, cela montre que la torsion mesurée est induite par le CFT, ce qui justifie la correction réalisée. Après correction, les résultats obtenus avec le couplage *PUFFIn/Abaqus 1D* sont bien plus proches des mesures expérimentales. À

l'exception de l'angle d'attaque de $-3°$, les points expérimentaux se superposent quasiment aux résultats numériques. La différence est attribuée à une erreur de manipulation durant les essais. Ces résultats montrent l'influence importante du CFT sur la réponse hydroélastique du foil. La polaire du foil obtenue numériquement et expérimentalement est présentée dans la figure 4.23.

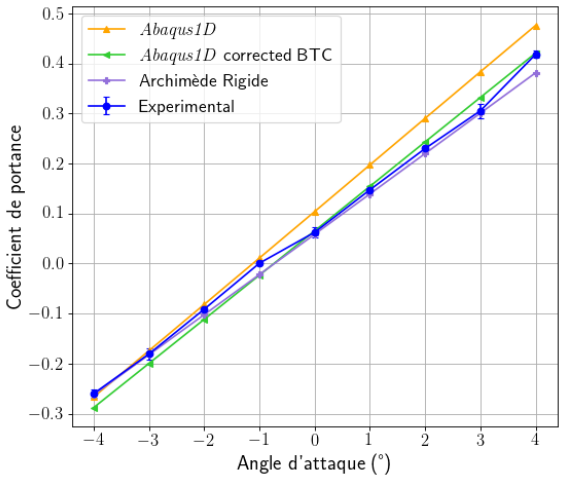


FIGURE 4.23 – Mesures expérimentales et numériques du coefficient de portance du foil à une immersion $h/c = 2.76$ et une vitesse d'écoulement $U = 0.8$ m/s, après correction du CFT.

Les résultats numériques corrigés sont proches des résultats expérimentaux pour les angles d'attaque positifs alors que pour les négatifs, les résultats numériques sans correction sont plus proches. La principale différence entre les expériences et les simulations numériques est la tendance du coefficient de portance. Dans les modèles numériques, le coefficient de portance est une fonction monotone de l'angle d'attaque alors que les essais montrent une variation de pente entre les angles d'attaque de $-1°$ et $0°$. Après analyses des résultats expérimentaux, ce changement de tendance s'explique par un problème de mesures des efforts sur le foil dans sa configuration initiale (soumis uniquement à la poussée d'Archimède et la gravité), lui-même attribué à une dérive de la balance fixée à l'hexapode.

Dans la figure 4.23, les coefficients de portance d'un foil rigide sont également tracés (*Archimède rigide*). En raison de la configuration initiale utilisée pour mesurer les déplacements expérimentaux, les résultats rigides sont obtenus à l'aide de *PUFFIn* en considérant un maillage représentatif du foil déformé par sa flottabilité (en considérant la

correction sur le CFT). Les résultats *Archimède rigide* mettent en avant l'effet du CFT sur la portance du foil. La pente de la courbe de portance dans les simulations IFS est supérieure à celle obtenue avec le foil rigide. Cela signifie que pour un angle d'attaque donné, la déformation du foil augmente son coefficient de portance, ce qui a été observé dans la section 4.2.1. Dans la figure 4.23, l'angle de portance nul prédit numériquement est négatif, ce qui est attendu car pour avoir une portance nulle, un angle d'attaque négatif doit être défini pour compenser la torsion du foil induite par la poussée d'Archimède.

Pour finir, la figure 4.24 illustre la forme déformée du foil obtenu numériquement pour l'angle d'attaque de 4°. Les coefficients de pression sur la surface du foil sont représentés pour la configuration initiale et déformée. Les coefficients de pression à la surface du foil sont plus faibles dans la configuration déformée, mettant en avant l'angle d'attaque additionnel induit par la déformation et le CFT du foil.

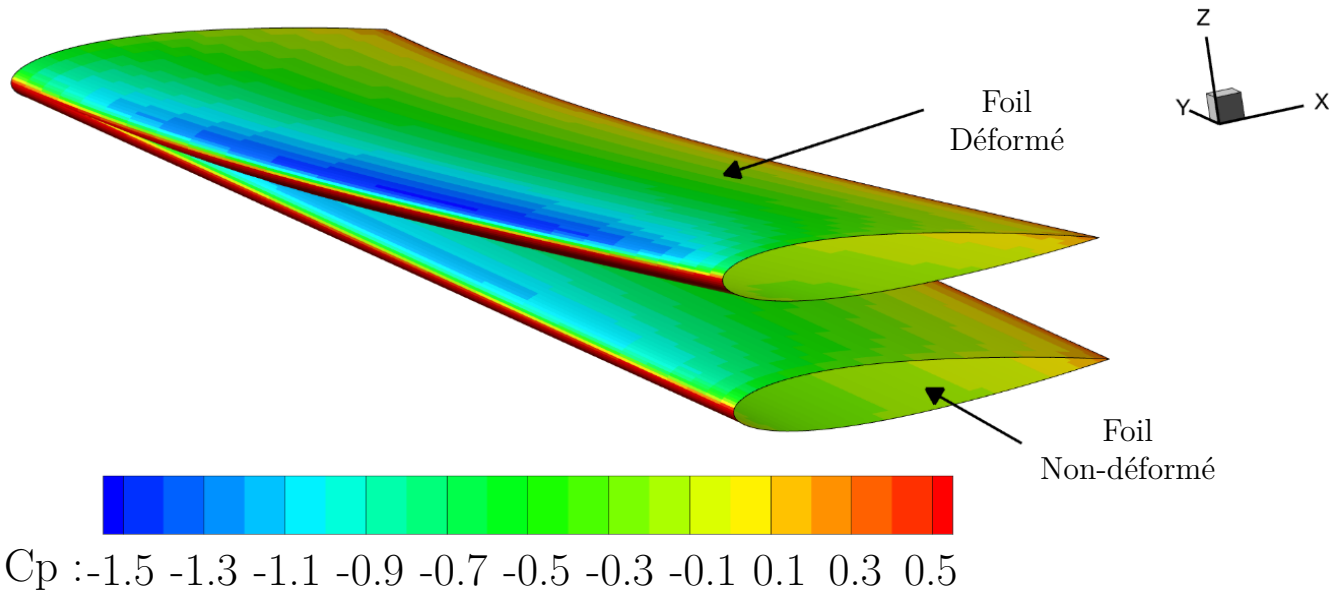


FIGURE 4.24 – Distribution de pression, obtenue numériquement, sur la surface du foil dans sa configuration initiale et déformée, pour une immersion $h/c = 2.76$, une vitesse d'écoulement $U = 0.8$ m/s et un angle d'attaque de 4°.

Pour résumer, il est montré que le modèle *Abaqus 1D* donne des résultats très proches du modèle *Abaqus 3D* pour des chargements fluides, ce qui valide l'utilisation du modèle de poutre équivalente pour modéliser les IFS d'un foil en composite pour des écoulements stationnaires.

Les résultats expérimentaux montrent que le CFT estimé numériquement est surestimé. Une réduction du coefficient de couplage flexion torsion K_{45}^{cs} dans *Abaqus 1D* est nécessaire pour reproduire les résultats expérimentaux. Cela montre que le modèle de poutre équivalente prédit de manière suffisamment précise la réponse hydroélastique du foil, à condition de correctement modéliser le CFT. La détermination numérique du terme K_{45}^{cs} est très sensible vis-à-vis de l'empilement composite défini dans Abaqus^{TM}. Par exemple, pour une variation de 1° de l'orientation du pli d'UD et une variation de 5% du module d'élasticité longitudinal du pli d'UD, on observe une variation de 7% de la valeur du terme K_{45}^{cs}.

Sachant que le couplage *PUFFIn/Abaqus 1D* est développé pour résoudre un problème d'optimisation, les tendances des valeurs mesurées sont plus importantes que leur précision. L'objectif est de converger vers un optimum, qui pourra ensuite être critiqué à l'aide de modèles numériques de plus haute fidélité. Les campagnes expérimentales montrent que les tendances sont correctement captées par le modèle de poutre équivalente, ce qui valide son utilisation pour l'optimisation de designs de foils, présentée dans la section 5.2.

4.3 Conclusion

Les résultats des deux campagnes expérimentales présentées dans le chapitre 2 sont détaillés dans ce chapitre. Pour commencer, la différence de temps de calcul entre les modèles éléments finis haute et basse fidélité est quantifiée, ce qui confirme l'intérêt du modèle de poutre pour la résolution d'un problème d'optimisation où l'on cherche à tester le plus grand nombre de designs en un minimum de temps.

Ensuite, les propriétés équivalentes des foils expérimentaux, obtenues avec l'analyse de sections, sont présentées et confrontées aux comportements élastiques attendus vis à vis de l'orientation des fibres composant sa peau. Des résultats classiques sont observés avec par exemple, une diminution de la raideur en flexion et une augmentation de la raideur en torsion lorsque les fibres sont désalignées de l'envergure du foil. Un des objectifs de cette validation est de qualifier la modélisation du CFT par le modèle de poutre. Pour ce faire, les déformations globales du foils sont étudiées pour les différents foils en considérant des cas de chargements induisant des torsions significatives. Une bonne cohérence entre les résultats expérimentaux et numériques est observée, ce qui est encourageant pour la suite des travaux. En complément, la reconstruction des sections gauchies permet de s'intéresser à des phénomène locaux de déformation à proximité de l'encastrement du foil,

mettant également en avant une bonne concordance entre les modèles numériques et le dispositif expérimental. La suite du processus de validation est purement numérique et a pour but d'évaluer les limitations du modèle de poutre. Les différents aspects étudiés et les observations associées sont listés ci-dessous :

- Gauchissement des sections : ces résultats montrent que malgré une surestimation du gauchissement, le modèle basse fidélité capte bien les tendances du gauchissement des sections du foil ;
- Influence de l'allongement du foil : l'allongement minimal pour lequel les différences entre les modèles haute et basse fidélité deviennent non négligeable correspond à des foils qui ne sont pas considérés pour l'optimisation ;
- Reconstruction des champs de contraintes dans les sections : les contraintes prédites par le modèle de poutre sont très proches de celles du modèle éléments finis 2D/3D, ce qui est encourageant pour définir un critère d'intégrité structurel dans une boucle d'optimisation ;
- Analyse des modes propres de la structure : les tendances et valeurs des fréquences propres des foils sont bien captées par le modèle de poutre, ce qui permet d'évaluer la possibilité d'apparition de phénomènes de résonance pour un design de foil.

Les résultats de la seconde campagne, réalisée dans le bassin à courant de l'Ifremer, valide la capacité du couplage *Abaqus 1D/PUFFIn* à modéliser le comportement hydroélastique du foil. En effet, les phénomènes de variation de portance associés à l'angle d'attaque supplémentaire induit par le CFT du foil sont bien captés, ce qui est indispensable pour le processus d'optimisation où ce type de phénomène est exploité pour générer des designs de foils se régulant de manière passive. On observe cependant que le CFT des foils est surestimé dans les modèles numériques. Ces différences sont attribuées aux incertitudes sur la fabrication du foil (orientation des fibres, présence de bulles d'air, etc...). Malgré cette surestimation du CFT, le couplage *Abaqus 1D/PUFFIn* capte bien les IFS d'un foil avec un CFT significatif, ce qui valide son utilisation pour résoudre un problème d'optimisation géométrique et structurel, présenté dans le chapitre 5.

Chapitre 5

Optimisation structurelle et géométrique d'un hydrofoil souple

Dans le chapitre 4 de cette thèse, le modèle numérique basse fidélité permettant de prédire les IFS d'un hydrofoil souple en composite, introduit dans le chapitre 3, a été validé dans le chapitre 5. Il est alors possible d'exploiter ce modèle pour optimiser simultanément la géométrie et la structure d'un design de foil. Ce chapitre présente la méthode d'optimisation considérée et les résultats d'une optimisation *multi-objectif*, géométrique et structurelle d'un foil en composite. Les propriétés structurelles et géométriques sont définies de manière à être représentatives de celles d'un IQFoil, support olympique depuis les jeux olympiques de 2024 (illustré dans la section 1.1).

5.1 Méthode d'optimisation

Applicable à de nombreux domaines (physique, logistique, gestion de ressources), l'optimisation consiste à identifier les paramètres optimaux permettant de résoudre un problème donné tout en maximisant l'efficacité, en minimisant les coûts ou en respectant des contraintes spécifiques. La résolution d'un problème d'optimisation nécessite l'identification des :

— Variables du problème ;
— Objectifs à optimiser ;
— Contraintes éventuelles à respecter.

Dans le cadre de cette thèse, les variables sont les propriétés géométriques et structurelles d'un foil et l'objectif est la maximisation de ses performances. L'évaluation des performances d'un foil constitue un problème complexe et représente un sujet de recherche à part entière. Le problème peut être contraint de différentes manières, cela peut par exemple être une limite sur la contrainte mécanique maximale admissible, permettant d'assurer l'intégrité structurelle d'un design de foil.

Le nombre de variables du problème d'optimisation définit son nombre de dimensions d. Pour un problème de dimension d, la recherche d'optimum est une analyse fonctionnelle ayant pour but de déterminer le minimum d'une (ou plusieurs) *fonction objectif* f (équivalent au maximum de $-f$), définie dans un *domaine d'optimisation* Ω_{opt} (appartenant à $\mathbb{R}^d$). Le domaine Ω_{opt} regroupe les paramètres admissibles du problème d'optimisation, c'est-à-dire les jeux de paramètres $\boldsymbol{x}$ pour lesquels les contraintes définies sont vérifiées. La formulation classique d'un problème d'optimisation non contraint est exprimée dans l'équation (5.1).

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\Omega_{opt}} f(\boldsymbol{x}) \tag{5.1}$$

Plusieurs algorithmes d'optimisation existent et ils peuvent être déterministes (méthode du *Simplex* (Nelder et al. 1965)) ou bien stochastiques (Stratégies d'évolution (Michalewicz et al. 1996)), le choix de la méthode d'optimisation dépend directement de la dimension du problème et des propriétés et du coût d'évaluation de la fonction objectif et des éventuelles contraintes. Par exemple, une fonction objectif linéaire et continue sur le domaine Ω_{opt} est adaptée à une résolution avec la méthode du *Simplex*.

Dans cette thèse, les problèmes d'optimisation sont *multi-objectifs*, induisant la définition de plusieurs fonctions objectifs notées f_j. Pour un problème à N objectifs, la formulation du problème d'optimisation non contraint, donnée dans l'équation (5.1), devient :

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\Omega_{opt}} f_1(\boldsymbol{x}), ..., f_N(\boldsymbol{x}) \tag{5.2}$$

Dans un problème d'optimisation multi-objectifs, il n'existe pas forcément de solution optimale unique permettant la minimisation de l'ensemble des fonctions objectifs. On cherche alors un jeu de solutions optimales, appelé front de Pareto, défini comme un compromis entre les différents objectifs. D'après la règle de domination de Pareto (Fonseca et al. 1998), un jeu de paramètres $\boldsymbol{x}$ est dit *dominé* par un autre jeu de paramètres $\boldsymbol{x'}$ si $f_j(\boldsymbol{x'}) \leq f_j(\boldsymbol{x})$ pour $1 \leq j \leq N$. Le front de Pareto est alors défini comme une prédiction de l'ensemble des jeux de variables $\boldsymbol{x}$ *non-dominés* appartenant à Ω_{opt}.

La procédure d'optimisation retenue ici est la méthode *Efficient Global Optimisation* (EGO), détaillée dans (Sacher et al. 2018a). Cette méthode repose sur l'utilisation de

modèles de substitution (*Surrogate Models*) permettant d'approcher les fonctions objectifs sur le domaine Ω_{opt}. Ces modèles, communément appelés *surfaces de réponse* ou *méta-modèles*, sont déterminés à l'aide d'une régression par processus Gaussiens des évaluations des fonctions objectifs, dont la méthode est détaillée dans (Rasmussen et al. 2005). L'intérêt de L'EGO est de réduire le coût global de l'optimisation en minimisant le nombre d'évaluations des fonctions objectifs (et des éventuelles contraintes). La construction des méta-modèles requiert un nombre suffisant d'évaluation k des fonctions objectifs (simulations IFS). Dans le cas contraire, les surfaces de réponse ne sont pas décrites correctement et ne permettent pas de converger vers des minimums représentatifs des vraies fonctions objectifs. À l'inverse, un grand nombre d'évaluations k permet une représentation fidèle des méta-modèles mais induit un temps de calcul important.

En amont de la construction des méta-modèles, un ensemble d'évaluations initiales des fonctions objectifs sont nécessaires. Les jeux de variables initialement testés représentent le *plan d'expérience* du problème. Afin que le plan d'expérience couvre au mieux le domaine de variabilité des variables du problème, celui-ci est déterminé avec un échantillonnage par Hypercubes Latins (LHS). Cette méthode d'échantillonnage *quasi-aléatoire* est présentée dans (McKay et al. 1979). Pour l'illustrer, la figure 5.1 montre un plan d'expérience déterminé avec des Hypercubes Latins pour un problème d'optimisation à deux variables a et b variant toutes deux entre 0 et 1.

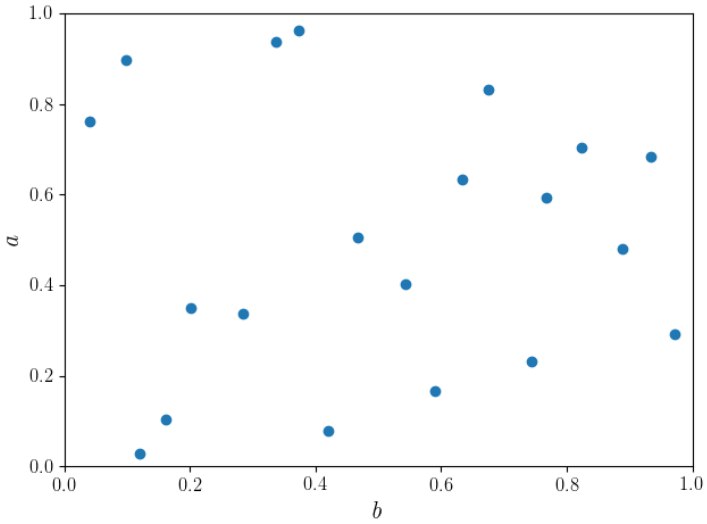


Figure 5.1 – Plan d'expérience déterminé avec des Hypercubes Latins à partir de 20 points.

La figure 5.1 montre la capacité de l'échantillonnage par hypercubes latins à couvrir efficacement l'ensemble du domaine de variabilité de a et b. Après avoir évalué les fonctions objectifs pour l'ensemble du plan d'expérience, le processus d'optimisation multi-objectifs par méta-modèles peut commencer. La figure 5.2 résume l'ensemble la boucle itérative d'optimisation.

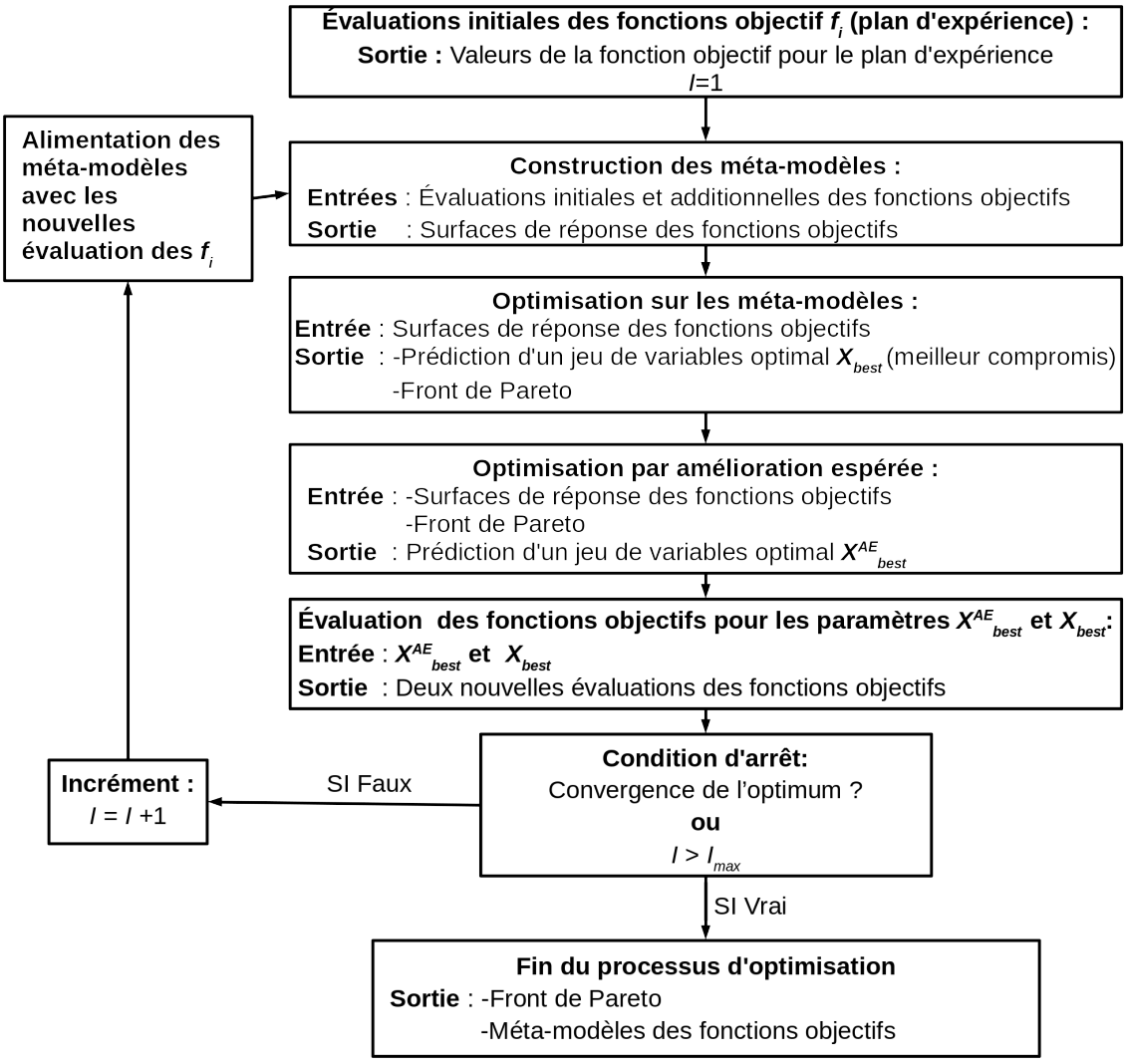


FIGURE 5.2 – Diagramme explicatif de la résolution d'un problème d'optimisation par méta-modèles Gaussiens.

La première étape du processus itératif d'optimisation est la construction des surfaces de réponse, basée sur une méthode par *processus Gaussiens*, initialement introduite par (MATHERON 1963b) et dont le détail est disponible dans (SACHER 2018). À partir

des méta-modèles, il est possible de déterminer un front de Pareto et un jeu de paramètres optimal, défini comme le meilleur compromis entre les fonctions objectifs. Le front de Pareto est obtenu à l'aide des méta-modèles et de l'algorithme d'optimisation multi-objectifs sous contraintes NSGA2 (Deb et al. 2002). Ensuite, à partir du front de Pareto, un compromis entre les fonctions objectifs est déterminé avec la méthode présentée dans (Renaud et al. 2022). Le jeu de paramètres ainsi obtenu est noté $\boldsymbol{X_{best}}$. Pour améliorer la fiabilité du front de Pareto prédit, un jeu de paramètres $\boldsymbol{X_{best}^{AE}}$ est défini comme le jeu de paramètres appartenant au front de Pareto présentant la variance la plus importante (Passos et al. 2018). Ainsi, en évaluant la fonction objectif pour $\boldsymbol{X_{best}^{AE}}$ et en utilisant le résultat associé pour alimenter le méta-modèle, la variance du front de Pareto à l'itération suivante est réduite. Après détermination de $\boldsymbol{X_{best}}$ et $\boldsymbol{X_{best}^{AE}}$, les fonctions objectifs associées sont évaluées et les résultats sont ensuite utilisés pour alimenter les surfaces de réponses. Ces nouvelles surfaces de réponse permettent alors de trouver deux nouveaux jeux de paramètres, qui serviront également à alimenter les méta-modèles. Le processus itératif d'optimisation s'arrête si le nombre d'itérations I est supérieur à une valeur limite I_{max} (défini arbitrairement) ou si l'optimum est suffisamment convergé. L'optimum est considéré convergé si le front de Pareto n'évolue plus d'une itération à l'autre. Un critère de convergence peut également être défini à partir de la variance des points du front de Pareto, que l'on cherche à minimiser.

5.2 Mise en place du problème d'optimisation

Dans cette section 5.2, la mise en place d'un problème d'optimisation à deux dimensions est détaillée. Les résultats de cette optimisation sont ensuite présentés dans la section 5.3. Le foil optimisé ici est représentatif d'une aile d'IQFoil navigant au près. Dans ces conditions, le gréement présente une gîte non négligeable, fixée à 20.5° dans le problème d'optimisation. Avant de détailler la définition du problème d'optimisation, un modeleur permettant la définition de géométries paramétriques est introduit ainsi que la fonctionnalité de *Positionnement dynamique* de *PUFFIn*.

5.2.1 Structure et géométrie

Pour optimiser la géométrie d'un foil, il est pertinent d'avoir un outil permettant de générer une géométrie de foil pour un ensemble de paramètres donnés. Pour ce faire,

l'outil développé dans la thèse de (Ploé 2018) est retenu. Ce modeleur est également utilisé pour optimiser la géométrie d'une aile avant de Kitefoil dans (Pehlivan Solak et al. 2023). Les différents paramètres de ce modeleur sont illustrés dans la figure 5.3. Dans cette figure, les notations sont conservées en anglais pour des raisons de concision.

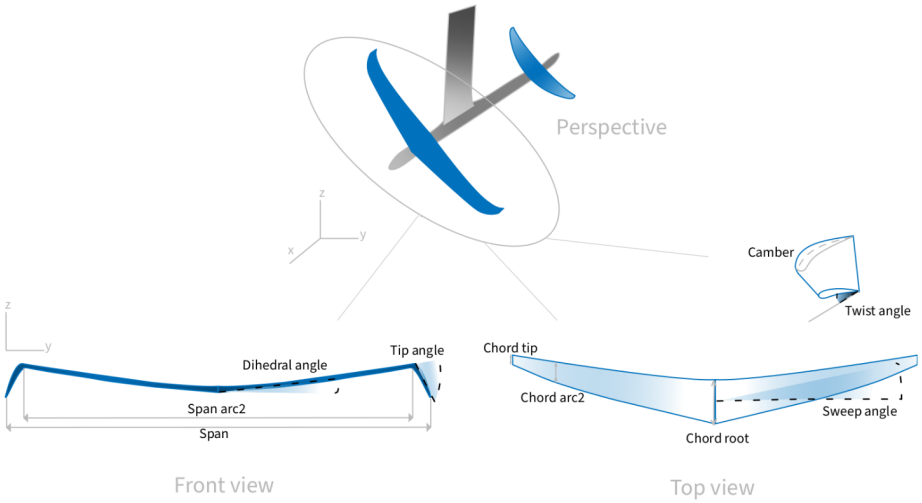


Figure 5.3 – Illustration du modeleur paramétrique de géométries de foils, adaptée de (Pehlivan Solak et al. 2023).

La figure 5.3 fait apparaître 10 paramètres géométriques. Cependant, dans le problème d'optimisation présenté ici, un seul paramètre est retenu, l'angle de vrillage (*Twist Angle* en anglais) du foil α_{twist}. Les autres paramètres sont fixés à partir des résultats d'une optimisation de forme réalisée préliminairement. Les variables géométriques fixées du problème sont détaillées dans le tableau 5.1.

Camber	Dihedral angle (°)	Tip angle (°)	Span (m)	Span arc2	Sweep angle (°)	Chord root (m)	Chord tip(m)	Chord arc2
0.0	-6.36	1.64	0.74	0.80	5.0	0.1	0.04	0.0

Table 5.1 – Caractéristiques géométriques fixes de l'aile.

Pour un vrillage $\alpha_{twist} = 0°$, la géométrie du foil généré par le modeleur est illustré dans la figure 5.4. Le profil d'aile retenu pour l'optimisation est un profil H105, conçu par Tom Speers (Speer 2001) de manière à limiter la séparation laminaire et la ventilation pour les faibles vitesses (25 nœuds en l'occurrence) et des angles d'attaques modérés. De plus, à haute vitesse, ce foil réduit les chances d'apparition de cavitation, à condition que

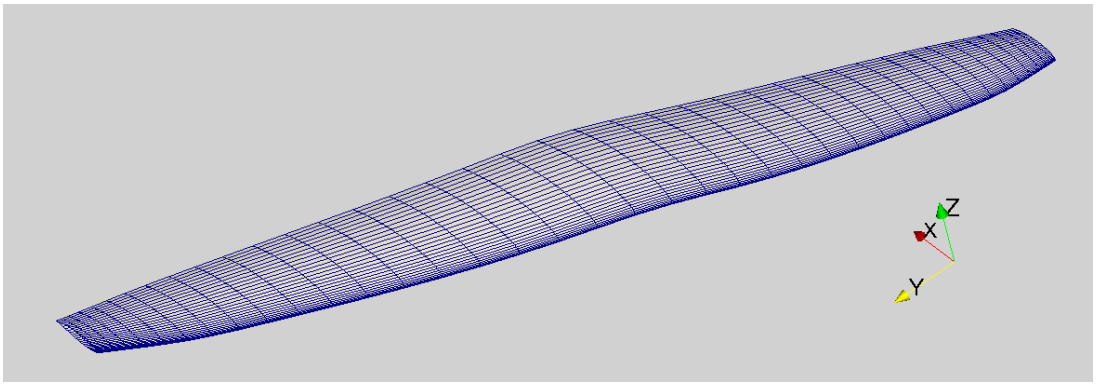


FIGURE 5.4 – Illustration de la géométrie du foil à optimiser pour un angle de vrillage $\alpha_{twist} = 0°$ et une gîte initiale de 20.5°.

les angles d'attaques soient petits. Ce profil est illustré de manière adimensionnelle dans la figure 5.5 car la valeur de sa corde varie entre 4 et 10 cm (cf. tableau 5.1).

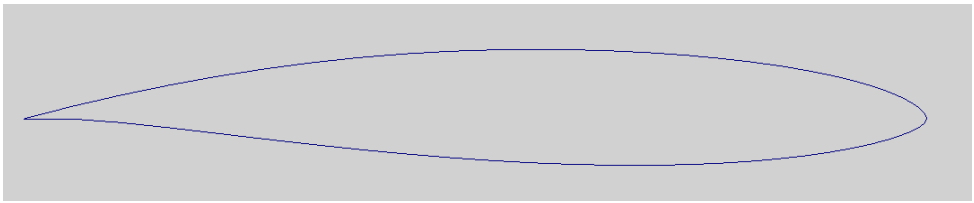


FIGURE 5.5 – Profil d'aile H105.

L'empilement composite considéré pour l'optimisation est représentatif de la structure des ailes de windfoils actuels. La peau du foil est composée de plis unidirectionnels de fibres de carbone dont les propriétés mécaniques sont rappelées dans le tableau 5.2 (avec 1 et 2 représentant respectivement la direction de la fibre de la trame). L'empilement des foils est défini par $[45, -45, (0)_3, (\theta_{plis})_3, 0, 90]°$ où θ_{plis} est un paramètre structurel pilotant l'orientation de 3 plis de fibre de carbone, impactant directement la raideur et le CFT du foil. Il est pertinent de noter que la fibre de carbone a été retenue pour l'optimisation car l'importante différence entre ses modules d'élasticité E_1 et E_2 favorise l'apparition d'un CFT important.

Les sections à analyser le long de l'envergure sont générées à partir de la forme du profil H105 (cf. figure 5.5). Les différents plis sont ensuite ajoutés vers l'intérieur du profil pour construire la géométrie 2D requise pour la détermination des propriétés équivalentes. Avec cette méthode, illustrée pour une section de faible corde ($\approx$ 4.5 cm) dans la figure

E_1 (GPa)	$E_2 = E_3$ (GPa)	$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	G_{12} (GPa)	$G_{13} = G_{23}$ (GPa)	Épaisseur (mm)
160.0	11.85	0.3	5.926	2.963	0.25

TABLE 5.2 – Caractéristiques structurelles des plis de carbone (imprégnés de résine) considérés pour l'optimisation.

5.6, le foil à optimiser est une structure creuse.

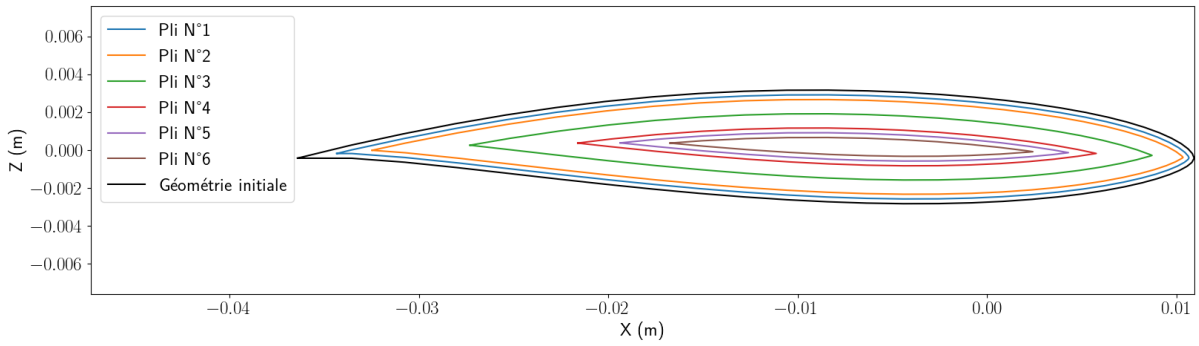


FIGURE 5.6 – Géométrie partitionnée du profil H105 relative à l'empilement $[45, -45, (0)_3, (\theta_{plis})_3, 0, 90]°$.

5.2.2 Positionnement dynamique

Pour comparer la performance de designs de foil, il est possible de comparer leur traînées sous certaines conditions. En effet, pour que cette comparaison ait du sens, il faut étudier la traînées des différents designs de foil pour un point de fonctionnement commun. Dans le cadre de l'optimisation d'une aile d'IQFoil, ce point de fonctionnement est défini comme la position du foil où celui-ci génère une portance compensant le poids du coureur et du gréement (environ 90 kg) et un effort latéral agissant comme une force anti-dérive (variant entre 375 et 450 N).

Dans ce cadre, *PUFFIn* propose une fonctionnalité de positionnement dynamique. Avec cette méthode, un effort latéral et vertical sont imposés au début d'un calcul et *PUFFIn* résout itérativement le lacet et l'assiette du foil à lui appliquer pour atteindre le point de fonctionnement désiré. Cette fonctionnalité, détaillée dans les travaux de (PLOÉ 2018), est primordiale pour optimiser des designs de foils en comparant leurs efforts de traînée hydrodynamique. Les designs de foils explorés sont initialement placés à 30 cm de profondeur, puis une gîte de 20.5° leur est imposée. En considérant une demi envergure

de 0.37 m et un dièdre de $-6.36°$ (cf. tableau 5.1), l'immersion minimale du foil, atteinte en extrémité d'aile, est d'environ 21 cm.

5.2.3 Fonction objectif

Avant de présenter les fonctions à minimiser dans le processus d'optimisation, les domaines de variabilité des paramètres géométriques et structurels sont rappelés dans le tableau 5.3.

	$\alpha_{twist}(°)$	$\theta_{plis}(°)$
min	-1.5	-90
max	1.0	90

TABLE 5.3 – Domaines de variabilité des paramètres structurels et géométriques du problème d'optimisation.

Comme expliqué dans la section 5.1, l'optimisation réalisée ici est multi-objectifs. En effet, la traînée du foil est prédite pour deux vitesses, 25 et 35 nœuds. Pour chacune de ces vitesses, les designs de foils sont positionnés dynamiquement (cf. section 5.2.2) et leurs efforts de traînée sont estimés à l'aide du couplage *PUFFIn/Abaqus 1D* (cf. section 3.4.2). Les caractéristiques des deux points de fonctionnement, notés F_0 et F_1, sont données dans le tableau 5.4.

Objectif	Effort vertical cible (N)	Effort horizontal cible (N)	Vitesse (nds)	Gîte (°)
F_0	900	337.5	25	20.5
F_1	900	450	35	20.5

TABLE 5.4 – Point de fonctionnements des foils à optimisés.

Les objectifs à remplir sont donc les minimisations des efforts de traînée du foil obtenues pour les deux points de fonctionnement.

5.3 Résultats

Dans cette section, les résultats du problème d'optimisation présenté dans la section 5.2 sont détaillés. Pour l'optimisation, un ensemble de 20 simulations est retenue pour le

plan d'expérience. À partir de cet échantillon de départ, une optimisation par méta-modèle est réalisée en suivant le protocole détaillée dans la section 5.1. Les résultats associés sont illustrés par les figures 5.7 et 5.8, où sont tracées les traînées des différents designs évalués (pour les deux vitesses). L'unique différence entre les figures 5.7 et 5.8 est l'échelle de couleur utilisée, représentant le vrillage du foil α_{twist} dans la figure 5.7 et l'orientation θ_{plis} des plis de carbone dans la figure 5.8.

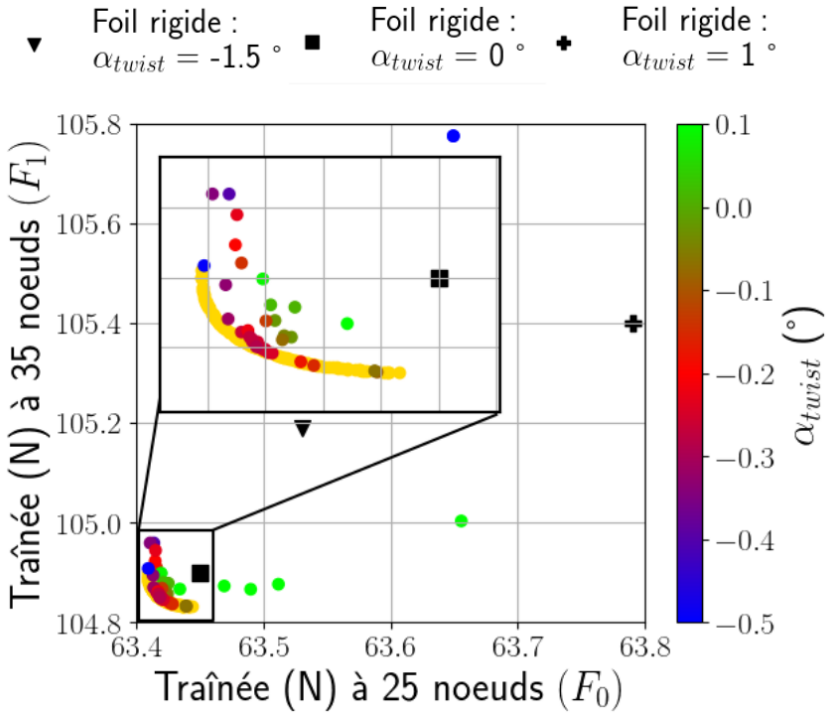


FIGURE 5.7 – Efforts de traînées des designs testés et front de Pareto (jaune) du problème d'optimisation – Échelle de couleur : Vrillage α_{twist} du foil.

Dans les figures 5.7 et 5.8, les points jaunes représentent le front de Pareto prédit. Les marqueurs noirs représentent quant à eux les traînées de foils rigides associés à des valeurs de vrillage α_{twist} couvrant l'ensemble du domaine de variabilité ($-1.5°$,$0°$ et $1°$). Les résultats montrent un front de Pareto bien défini, mettant en avant une bonne convergence de notre problème d'optimisation. Les foils rigides (en noir) présentent des efforts de traînées légèrement supérieures aux foils souples, ce qui met en avant l'intérêt d'optimiser la performance de foils en considérant des designs *souples*.

La figure 5.7 montre que les designs situés sur le front de Pareto peuvent être discriminés par leur valeur de vrillage α_{twist}. En effet, la valeur de vrillage optimale est comprise

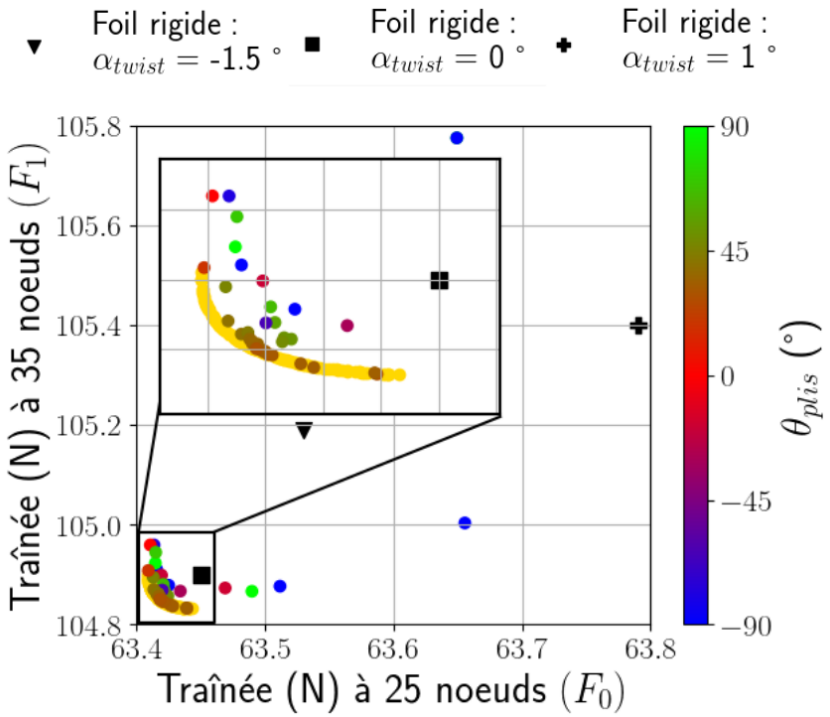


FIGURE 5.8 – Efforts de traînées des designs testés et front de Pareto (jaune) du problème d'optimisation – Échelle de couleur : Orientation θ_{plis} de plis de carbone dans le foil.

entre $-0.3°$ et $0.1°$ et plus sa valeur est basse, plus la traînée à 25 nœuds est réduite, et inversement. Pour un foil opérant à haute vitesse, il serait donc intéressant de retenir un foil avec un vrillage initial proche de $0.1°$.

La figure 5.8 montre que les designs optimaux, situés sur le front de Pareto, sont tous associés à une orientation de fibres d'environ $30°$, montrant que ce ne sont pas les foils les plus rigides (obtenus à priori pour $\theta_{plis} = 0°$) qui sont les plus hydrodynamiques. De plus, la figure 5.8 montre que l'angle θ_{plis} des designs optimaux est toujours positif, mettant en avant l'implication d'un couplage flexion-torsion (CFT) spécifique. En effet, le signe du CFT définit le signe de la torsion induite par la flexion du foil, résultat mis en avant avec la campagne d'essais en air (cf. sections 4.1.3 et 4.1.3). On rappelle la distinction faite entre les foils *stable* et *instable*, respectivement associés à des torsions induites diminuant et augmentant l'angle d'attaque du foil. Les designs situés sur le front de Pareto sont instables, ce qui n'est pas un résultat intuitif. Pour comprendre ce résultat, les surfaces de réponse de la traînée du foil et de la composante en lacet de son positionnement dynamique sont tracées dans la figure 5.9. Dans cette figure, la coordonnée verticale d'un point de la surface représente la traînée ou le lacet pour le point de fonctionnement F_0 alors que l'échelle de couleur est relative au point de fonctionnement F_1. Ces résultats mettent en avant des tendances similaires de la traînée et du lacet pris par le foil pour les deux vitesses considérées.

La figure 5.9 montrent que le calage en lacet (pour les deux vitesses) est minimum pour une orientation $\theta_{plis} \approx 30°$, l'impact du vrillage α_{twist} sur le calage en lacet est moins marqué. L'observation inverse est faite pour la traînée du foil, dépendante principalement de l'angle de vrillage α_{twist}. Ces résultats montrent que les foils instables ($\theta_{plis} \approx 30°$) permettent de limiter le lacet pris par le foil et un vrillage proche de $0°$ permet de limiter sa traînée. Les designs optimaux sont donc ceux qui remplissent ces deux conditions. Afin de rendre compte de la géométrie et la déformation d'un design optimal, la figure 5.10 illustre la géométrie initiale et déformée d'un foil caractérisé par une orientation $\theta_{plis} = 30°$ et un vrillage $\alpha_{plis} = -0.2°$). En raison des faibles valeurs d'angles de calage, il est compliqué d'apprécier l'effet du positionnement dynamique dans la figure 5.10.

Les résultats de ce premier problème d'optimisation montrent que des designs de foils souples instables permettent d'obtenir des foils avec une traînée moindre en limitant l'ajustement de la position du foil à appliquer pour que celui-ci atteigne un effort cible. Cela est encourageant pour designer des foils performants sur une large gamme de vitesses, où la position du coureur aurait moins besoin d'être ajustée en fonction de la vitesse, grâce

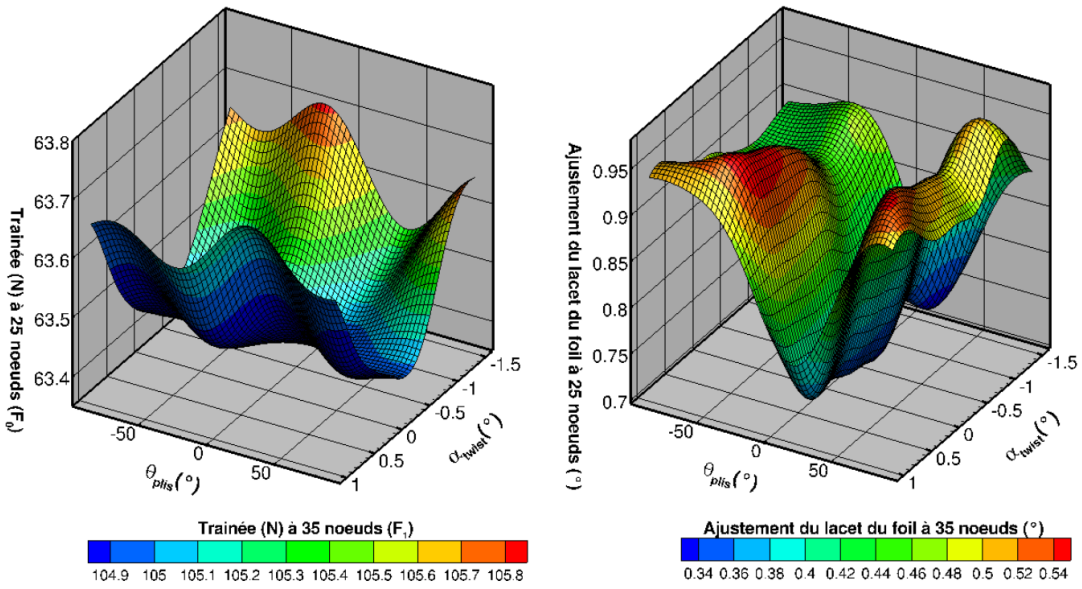


FIGURE 5.9 – Surfaces de réponse de la traînée (à gauche) et du calage du lacet du foil (à droite).

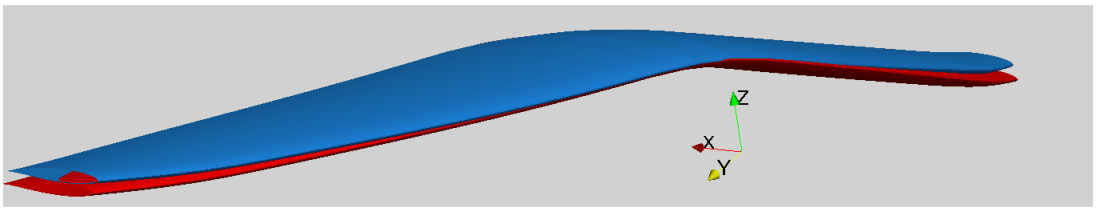


FIGURE 5.10 – Géométrie initiale et déformée d'un foil caractérisé par une orientation $\theta_{plis} = 30°$ et un vrillage $\alpha_{plis} = -0.2°$) – (●) : Foil non déformé, (●) : Foil déformé et positionné dynamiquement.

à une régulation passive induite par la déformation du foil.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode d'optimisation multi-objectif est présentée. L'algorithme d'optimisation retenu, appelé *Efficient Global Optimisation* (EGO), est basée sur la régression des fonctions objectifs par des méta-modèles Gaussiens. Cette démarche permet de converger vers un optimum en limitant le nombre d'évaluations de la fonction objectif, qui peut être coûteuse en temps de calcul.

Ensuite, un problème d'optimisation de dimension 2 avec deux objectifs est présenté et résolu. Dans ce problème, les foils testés sont étudiés pour deux vitesses car l'objectif est de maximiser la performance de foils sur une plage de vitesse donnée. Les paramètres du problème d'optimisation sont le vrillage de l'aile (paramètre géométrique) et l'orientation de 3 plis unidirectionnels de fibres de carbone composant sa peau (paramètre structurelle). Les résultats montrent que les optimas déterminés sont des designs de foils *instables* (voyant leur angle d'attaque augmenter avec la déformation de l'aile). La surface de réponse du positionnement en lacet du foil montre que cette caractéristique permet de réduire l'amplitude du calage du foil.

Ces résultats montrent l'intérêt de considérer des designs de foils souples pour améliorer les designs actuels des foils. Ces résultats représentent le début du processus d'optimisation. Dans le futur, l'optimisation pourra être réalisée en augmentant le nombre de variables géométriques et structurelles du problème d'optimisation. Pour les variables structurelles, il est possible d'imaginer des empilements avec davantage de plis dont l'orientation peut être ajustée.

Chapitre 6

Validations des développements numériques

Durant cette thèse, un outil numérique appelé *beamFoil* a été développé ayant pour objectif de remplacer le logiciel Abaqus^{TM} dans les futurs travaux. Le logiciel *beamFoil* possède deux fonctionnalités, permettant la détermination des propriétés équivalentes de sections anisotropes et inhomogènes puis leurs exploitations pour prédire le comportement d'une structure (allongée) avec des éléments finis poutres. Dans ce chapitre 6, des résultats obtenus avec *beamFoil* et Abaqus^{TM} sont confrontés afin de valider les développements réalisés durant cette thèse. Le développement de *beamFoil* a été réalisé en suivant la théorie présentée dans les sections 3.3.1 et 3.3.2. La validation de la fonctionnalité d'analyse de sections est présentée en premier dans la section 6.1 et la validation du modèle de poutre est présentée ensuite dans la section 6.2. Ce chapitre a un intérêt pratique, il permet en effet de valider l'utilisation du logiciel *beamFoil* pour s'affranchir du logiciel sous licence Abaqus^{TM}.

6.1 Validation du modèle d'analyse de sections

Le cas de validation retenu ici est l'analyse d'un profil d'aile H105, présenté lors de la définition du problème d'optimisation (voir figure 5.5). L'empilement considéré est cependant plus simple que celui détaillé dans la section 5.2.1. En effet, la peau du foil est définie comme un empilement de 5 plis de fibres de carbone (dont les propriétés sont explicitées dans le tableau 5.1) ayant tous la même orientation, notée θ_{sect}. Afin de facilement illustrer ce cas de validation, le profil étudié a une corde de 4.5 cm, considérée faible au vu de la géométrie du foil définie dans le problème d'optimisation du chapitre 5 (cf. section 5.2.1).

La géométrie est générée de la même manière que dans la section 5.2.1, où les plis composites sont ajoutés vers l'intérieur du profil en prenant la forme du profil H105

comme point de départ (cf. figure 5.6). Après génération de la géométrie, celle-ci est maillée dans Abaqus™ avec des éléments finis triangulaires. Le maillage éléments finis associé est illustré par la figure 6.1.

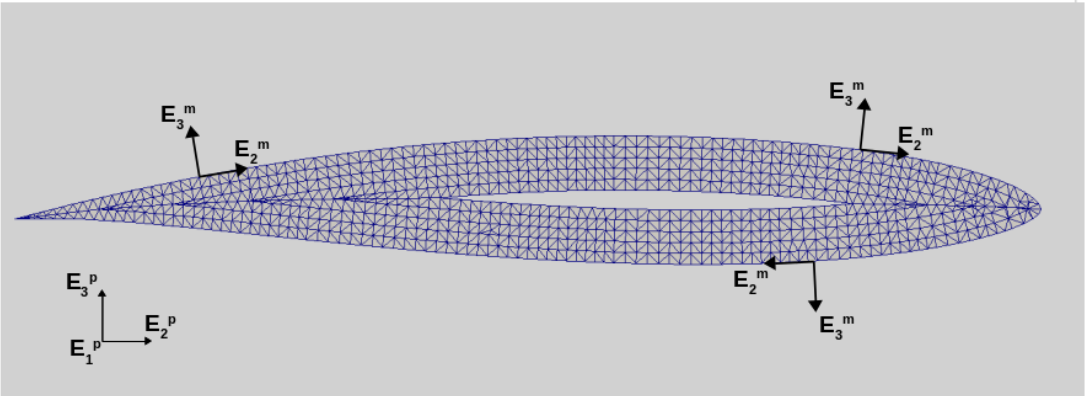


FIGURE 6.1 – Maillage éléments finis d'un profil d'aile H105.

Dans la figure 6.1, le repère global dans lequel sont exprimées les propriétés équivalentes est illustré par $E^p = (\boldsymbol{E_1}^p, \boldsymbol{E_2}^p, \boldsymbol{E_3}^p)$. Un second repère local $E^m = (\boldsymbol{E_1}^m, \boldsymbol{E_2}^m, \boldsymbol{E_3}^m)$ est défini sur l'ensemble du foil en considérant la direction $\boldsymbol{E_1}^m$ normale au profil et la direction $\boldsymbol{E_2}^m$ tangente à la surface du foil. Une rotation supplémentaire θ_{sect} est ensuite applicable autour de l'axe $\boldsymbol{E_3}^m$), modélisant l'orientation des fibres. Le repère ainsi formé définit alors l'orientation local du matériel, indispensable pour traiter des problèmes impliquant des matériaux anisotropes. L'orientation local de chaque élément fini est ensuite utilisée pour exprimer la matrice constitutive $\boldsymbol{\mathcal{C}}^p$, initialement donnée dans le repère matériel E^m, dans le repère global E^p (voir (J. REDDY 2003)). Trois orientations de fibres sont considérées, 0°, 45° et 90°. Pour chaque orientation, les propriétés équivalentes de la section sont déterminées avec Abaqus™ (notées *Abaqus*) et *beamFoil*. Un accord parfait entre les deux modèles numériques est trouvé, ce qui valide la capacité de nos développements à prédire les propriétés équivalentes de sections anisotropes et inhomogènes. Les valeurs des propriétés équivalentes pour l'orientation de 45° sont présentées dans le tableau 6.1.

Terme	$K_{11}^{cs}(N)$	$K_{22}^{cs}(N)$	$K_{33}^{cs}(N)$	$K_{44}^{cs}(N.m^2)$	$K_{55}^{cs}(N.m^2)$	$K_{66}^{cs}(N.m^2)$
beamFoil	3.62E+06	4.01E+06	9.33E+04	3.05E+01	9.74E+00	7.51E+02
Abaqus	3.62E+06	4.01E+06	9.33E+04	3.05E+01	9.74E+00	7.51E+02

Terme	$K_{12}^{cs}(N)$	$K_{13}^{cs}(N)$	$K_{14}^{cs}(N.m)$	$K_{15}^{cs}(N.m)$	$K_{16}^{cs}(N.m)$	$K_{23}^{cs}(N)$
beamFoil	-5.05E+04	1.36E+02	-3.40E+03	5.80E+02	3.47E+04	-9.49E+04
Abaqus	-5.05E+04	1.36E+02	-3.40E+03	5.80E+02	3.47E+04	-9.49E+04

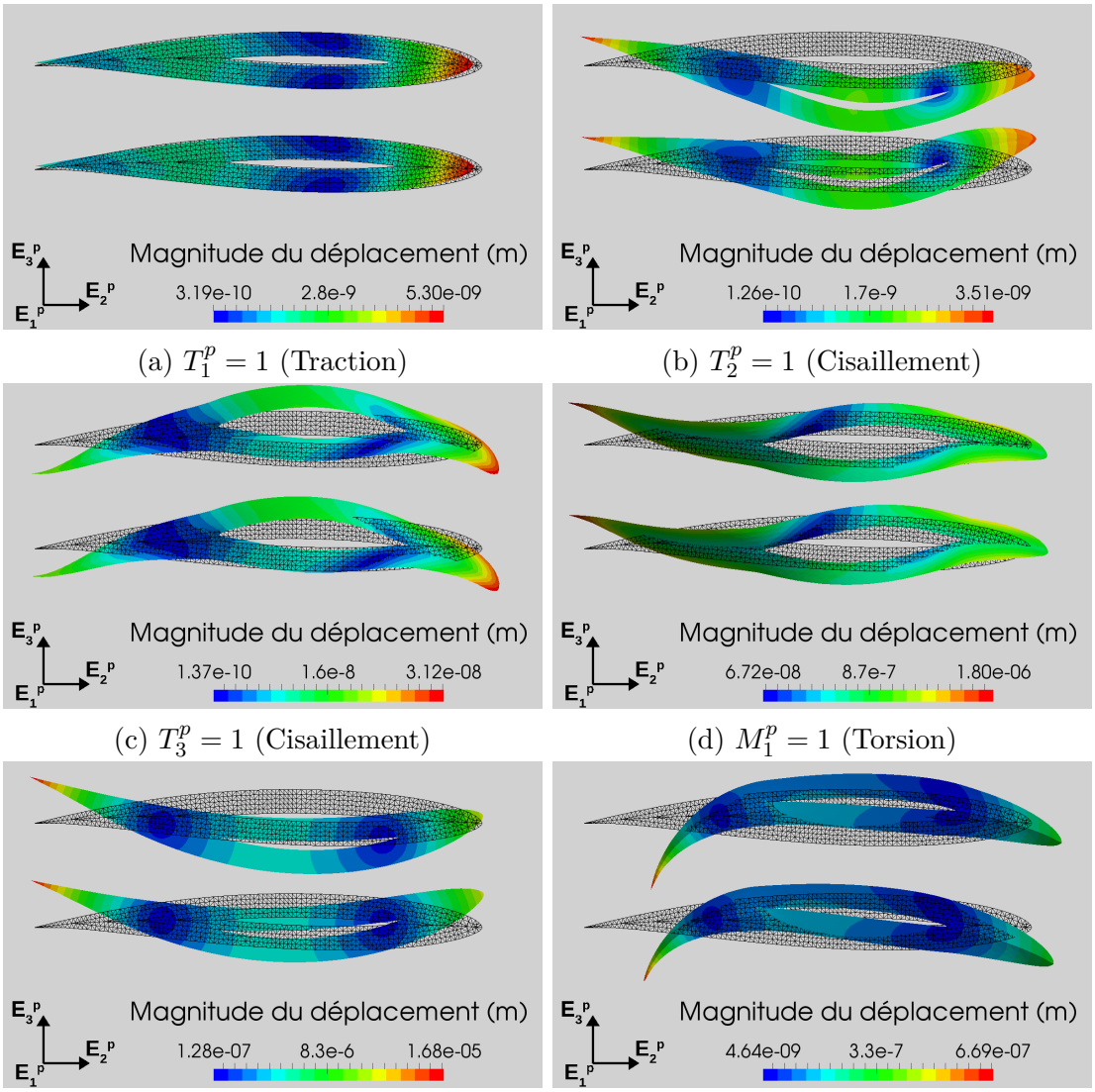
Terme	$K_{24}^{cs}(N.m)$	$K_{25}^{cs}(N.m)$	$K_{26}^{cs}(N.m)$	$K_{34}^{cs}(N.m)$	$K_{35}^{cs}(N.m)$	$K_{36}^{cs}(N.m)$
beamFoil	-2.86E+02	3.30E+03	-1.35E+03	-7.19E+02	-4.36E+01	9.89E+02
Abaqus	-2.86E+02	3.30E+03	-1.35E+03	-7.19E+02	-4.36E+01	9.89E+02

Terme	$K_{45}^{cs}(N.m^2)$	$K_{46}^{cs}(N.m^2)$	$K_{56}^{cs}(N.m^2)$
beamFoil	-1.11E+00	-3.63E+01	1.03E+01
Abaqus	-1.11E+00	-3.63E+01	1.03E+01

TABLE 6.1 – Propriétés équivalentes du cas de validation pour une orientation de fibres de 45°.

Pour finir la validation de la fonctionnalité d'analyse de sections de *beamFoil*, la figure 6.2 compare l'allure des fonctions de gauchissement de la section évaluées avec Abaqus™ et *beamFoil*, pour l'orientation $\theta_{sect} = 45°$. Dans cette figure, le gauchissement est normalisé afin de visualiser clairement l'allure du gauchissement, qui a une magnitude très faible.

La figure 6.2 montre encore une fois un excellent accord entre les développements et Abaqus ™, que ça soit en termes de forme mais également de magnitude. Ces résultats montrent qu'il est possible de s'affranchir d'Abaqus™ pour réaliser des analyses de sections anisotropes et inhomogènes.



(a) $T_1^p = 1$ (Traction)

(b) $T_2^p = 1$ (Cisaillement)

(c) $T_3^p = 1$ (Cisaillement)

(d) $M_1^p = 1$ (Torsion)

(e) $M_2^p = 1$ (Flexion)

(f) $M_3^p = 1$ (Flexion)

FIGURE 6.2 – Illustration des 6 fonctions de gauchissement pour une orientation de fibres de 45°, évaluées avec Abaqus™ (en haut) et *beamFoil* (en bas).

6.2 Validation du modèle de poutre

Afin de valider le modèle de poutre développé dans cette thèse, le cas présenté dans la section 4.1.6 est repris. Le foil étudié est donc le foil expérimental (cf. section 2.1) avec le pli d'UD orienté à $-50°$, dont les propriétés équivalentes sont données dans la section 4.1.2. Le cas de chargement de la section 4.1.6 est simplifié, le foil est encastré à sa base et un effort ponctuel vertical non suiveur est défini à son extrémité, correspondant à une masse suspendue de 5 kg. Le même repère que précédemment est utilisé, où la poutre est alignée avec l'axe Z et l'axe Y représente la verticale terrestre. Le nombre d'éléments poutre considéré est identique à celui défini dans la section 3.3.3, soit 70 éléments. Cette analyse par éléments finis est réalisée avec Abaqus™ (noté *Abaqus*) et l'outil développé durant cette thèse, *beamFoil*, les résultats obtenus sont tracés dans la figure 6.3. Dans cette figure, les 6 composantes (3 de translation et 3 de rotation) des déplacements nodaux sont tracés le long de l'envergure du foil.

La figure 6.3 montre un excellent accord des déplacements nodaux Dy, Dz, Rx et Rz. À l'inverse, le déplacement horizontal Dx et la rotation associée Ry obtenus avec *beamFoil* diffèrent des résultats donnés par Abaqus™, avec une différence significative de tendance pour la rotation Ry. Ces disparités sont attribuées aux différences entre le modèle développé dans *beamFoil* et dans Abaqus™. Dans le modèle Abaqus™, le champ de déplacement de la poutre prend en compte une composante de gauchissement pour la dérivation des équations d'équilibre alors que ce n'est pas le cas avec notre outil (cf. section 3.3.2). Le gauchissement étant un mouvement de faible amplitude en comparaison à la déformée globale de la poutre, les différences sont appréciables uniquement pour les petits déplacements. Au vu de l'amplitude de ces déplacements, les différences mis en avant dans la figure 6.3 permettent quand même de valider les développements considérés dans cette thèse. Afin de quantifier ces différences, le tableau 6.2 compare la torsion et l'amplitude du déplacement et de la rotation de l'extrémité de la poutre. Ces résultats montrent une différence maximale de 0.012%, ce qui montre que le modèle de poutre développé dans *beamFoil* permet de remplacer celui implémenté dans Abaqus™.

	Magnitude du déplacement (m)	Magnitude de la rotation (°)	Torsion (°)
Dev	1.33E-01	8.40E+00	-1.37E+00
Abaqus	1.33E-01	8.40E+00	-1.37E+00
Diff (%)	1.20E-02	6.75E-03	-7.32E-02

TABLE 6.2 – Torsion et magnitude du déplacement à l'extrémité libre du foil, évaluées avec Abaqus™ et *beamFoil*.

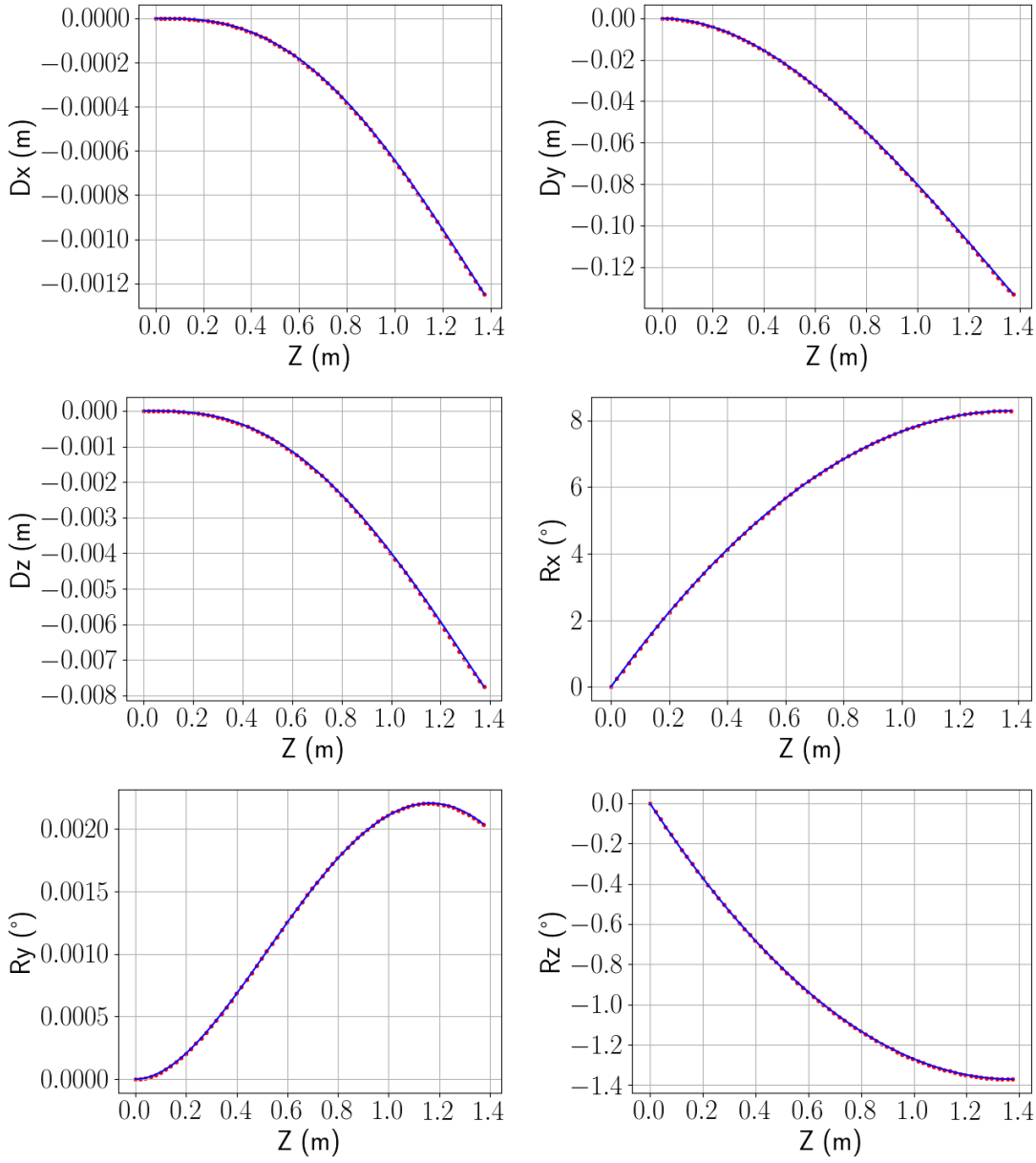


FIGURE 6.3 – Déplacements et rotations nodales du foil avec une orientation d'UD de −50°, évaluées pour une masse de 5 kg suspendue à son extrémité – (_) : *Abaqus*, (_) : *beamFoil*.

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre 6, deux cas de validations numériques sont proposés pour valider les développements réalisés durant cette thèse. Le premier cas de validation montre un accord excellent entre Abaqus^{TM} et *beamFoil* pour l'analyse de sections anisotropes et inhomogènes. Le second montre également un très bon accord entre les deux modèles numériques pour le modèle de poutre équivalente. Cependant, des différences apparaissent pour les faibles déplacements mais elles n'invalident pas notre modèle. Ces différences sont attribuées à la prise en compte du gauchissement dans Abaqus^{TM} et notre outil, qui est différente. Ces cas de validations montrent que les outils numériques développés dans cette thèse permettent de s'affranchir du logiciel Abaqus^{TM} pour réaliser des simulations IFS Quasi-Statique. Il serait pertinent d'intégrer un aspect dynamique au modèle de poutre, qui permettrait d'étudier des cas avec des couplages IFS plus importants.

Conclusion et Perspectives

Les travaux de recherches de cette thèse, réalisée en partenariat avec l'Institut de Recherche de l'École Navale (IRENav) et l'Institut de Recherche Dupuy de Lôme (IRDL), s'intéressent à l'optimisation de la forme et de la structure de foils en matériaux composites. L'usage des foils de sustentation se démocratise dans le monde de la voile sportive depuis ces dernières années et cela à plusieurs échelles, allant de l'IQFoil à la classe Ultime. L'intérêt de ces appendices ne se cantonne pas au monde de la voile sportive. En effet, ils peuvent également permettre une réduction de la traînée de navires de transport.

Mis à part les foils de sustentation, les foils peuvent également être utilisés pour concevoir des systèmes de propulsion ou de récupération d'énergie. On peut citer l'entreprise Bluefins développant un système de propulsion constituée d'un foil horizontal dont le mouvement de pilonnement et de tangage imposé génère un effort de propulsion.

De nombreux travaux d'optimisation de forme d'hydrofoils ont été réalisés ces dernières années, avec pour objectif de réduire leur traînée ou encore la probabilité d'apparition de cavitation et de ventilation. En raison des importants efforts hydrodynamiques auxquels ils ont soumis, les foils sont susceptibles de subir d'importantes déformations.

Il est possible de tirer profit de ces déformations pour générer des foils auto-adaptatifs ou optimiser la transmission de l'énergie du moteur à un système de propulsion, de la même manière que pour des palmes de natation.

Auquel cas, une optimisation de forme n'est pas suffisante pour déterminer un design de foil optimal. Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans cette problématique, où l'objectif est d'explorer la détermination d'un design de foil souple optimisant sa performance sur une large gamme de vitesses.

Pour contrôler la portance d'un foil opérant à vitesse variable, il existe des systèmes actifs, tels que les palpeurs sur les foileurs de type Moth, et passifs, comme les foils *Dali* diminuant leurs surfaces utiles lorsque la portance augmente. En utilisant les propriétés anisotropes des matériaux composites, il est possible d'imaginer un foil immergé régulant sa portance en se déformant. En choisissant judicieusement la disposition des matériaux composites le constituant, il est possible de faire apparaître un couplage entre les modes de déformation de torsion et de flexion (noté CFT pour couplage flexion-torsion), impactant

directement l'angle d'attaque d'un foil déformé dans un écoulement. Ce type de régulation passive est majoritairement utilisé pour des problèmes aéroélastiques, tels que l'étude de turbines ou de planeurs.

La simulation numérique des IFS d'un foil souple permet de tester un grand nombre de designs en limitant au maximum le prototypage. Cette thèse présente la mise en place d'un couplage IFS basse-fidélité permettant l'optimisation de foils en matériaux composites. Les efforts fluides appliqués sur le foil sont déterminés avec le logiciel *PUFFIn*, basé sur la théorie des écoulements potentiels. La réponse élastique est prédite avec un modèle de poutre équivalente, décomposé en une analyse de sections et une analyse par éléments finis poutres équivalents. Une modélisation haute-fidélité avec des éléments finis volumiques et surfaciques est également réalisée dans un objectif de validation numérique-numérique de la méthode de poutre équivalentes. Les résultats présentés dans ce manuscrit ont été obtenus avec des modèles éléments finis mis en place avec le logiciel Abaqus^{TM}. Cependant, un modèle de poutre de équivalente et d'analyse de sections a été développé durant cette thèse afin de s'affranchir des contraintes associées à l'utilisation d'un logiciel commercial pour les futurs études.

Dans l'Introduction, l'historique des foils est brièvement présenté ainsi que le contexte de cette étude. Des rappels sur les phénomènes physiques à modéliser sont également donnés, conjointement avec un état de l'art des études portant sur des surfaces portantes en composite évoluant en Interaction Fluide-Structure (IFS).

Dans le chapitre 2, deux campagnes expérimentales sont présentées. Ces essais permettent ensuite de valider la méthode de modélisation numérique des IFS d'un foil. Pour la première campagne d'essais, réalisée en air, quatre foils de géométries considérées identiques sont étudiés. Ils sont caractérisés par des propriétés mécaniques différentes pilotées par l'orientation d'un pli Uni-Directionnel (UD) de verre constituant leur peau. Cette orientation impacte directement la raideur de la structure, le signe et l'intensité du CFT. Dans ces essais en air, des masses sont suspendues à un carcan enserrant les foils et deux instruments de mesure permettent d'obtenir une mesure de déformation locale et globale. La seconde campagne expérimentale, réalisée dans le bassin de courant de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer, a pour objectif de valider la modélisation des IFS d'un foil en composite. Seul un des foils expérimentaux est testé dans le bassin, l'orientation de son pli d'UD induit un CFT rendant le foil instable, ce qui signifie que son angle d'attaque augmente lorsque celui-ci est fléchi. Ce phénomène permet de faire apparaître des déformations significatives, plus faciles à mesurer.

Le chapitre 3 explicite les notions théoriques impliquées dans la modélisation d'un hydrofoil souple en écoulement. La modélisation de la réponse élastique du foil, présentée en première, est davantage détaillée car elle représente le fondement des développements réalisés durant cette thèse. En effet, les méthodes de poutre équivalente et d'analyse de sections présentées dans ce chapitre 3 sont celles implémentées dans l'outil numérique développé, nommé *beamFoil*.

La mise en place des modèles éléments finis haute et basse-fidélité dans le logiciel Abaqus ™ est détaillée. Ces modèles sont mis en place pour reproduire les cas de chargements des essais en air. Les concepts derrière la modélisation de l'écoulement avec le logiciel *PUFFIn* sont ensuite brièvement exposés. Pour finir, la stratégie de couplage entre *PUFFIn* et les modèles éléments finis haute et basse-fidélité est présentée.

Les résultats des campagnes expérimentales sont confrontés aux résultats obtenus numériquement dans le chapitre 4. Les résultats des deux campagnes sont présentés séparément. Pour commencer, le gain de temps associé à l'utilisation du modèle de poutre équivalente est quantifié, en le comparant au temps nécessaire à l'analyse par éléments finis haute-fidélité. Ensuite, les propriétés équivalentes des foils expérimentaux sont présentées, afin de vérifier leur cohérence et anticiper l'interprétation des résultats expérimentaux. Les résultats des essais en air montrent que le modèle de poutre équivalente prédit correctement la réponse statique des foils en fonction de l'orientation de leur pli d'UD. Des cas de validations purement numériques sont également réalisés, permettant de valider la prédiction du gauchissement des sections du foil, de son champ de contraintes et de ses modes propres. Une discussion sur le rapport d'aspect minimum acceptable pour l'utilisation du modèle de poutre montre que les hydrofoils étudiés dans cette thèse se place bien dans son domaine de validité. Les résultats de la seconde campagne, réalisée dans le bassin à courant de l'Ifremer, valide la capacité du couplage IFS basse-fidélité à modéliser le comportement hydroélastique du foil. En effet, les phénomènes de variation de portance associés à l'angle d'attaque supplémentaire induit par le CFT du foil sont bien captés, ce qui est indispensable pour modéliser des foils régulant passivement leur portance.

Après validation de la méthode numérique couplant le modèle de poutre à *PUFFIn*, celle-ci est exploitée pour définir un problème d'optimisation de forme et de structure, présentée dans le chapitre 5. L'optimisation réalisée dans cette thèse est multi-objectif et conduite avec l'algorithme *Efficient Global Optimization* (EGO) implémenté dans le logiciel *metaOpt*. La méthode EGO est basée sur l'interpolation des fonctions objectifs par des méta-modèles Gaussiens, elle permet de converger vers un optimum en limitant le

nombre d'évaluations des fonctions objectifs. Un problème d'optimisation à deux variables est posé, où une aile de type IQFoil est étudiée à deux vitesses. Les paramètres du problème d'optimisation sont le vrillage de l'aile (paramètre géométrique) et l'orientation de 3 plis unidirectionnels de fibres de carbone composant sa peau (paramètre structurelle). L'objectif à remplir est de minimiser la traînée du foil aux deux vitesses pour un effort latéral et une portance fixée, atteinte en ajustant le lacet et l'assiette du foil durant les simulation IFS. Les résultats montrent que les optima déterminés à l'aide de *metaOpt* sont des designs de foils instables (voyant leur angle d'attaque augmenter avec la déformation de l'aile). L'étude de la surface de réponse du positionnement en lacet du foil montre que cette caractéristique permet de réduire l'amplitude du calage du foil réduisant ainsi sa traînée. Ces résultats montrent l'intérêt de considérer des designs de foils souples pour améliorer les designs actuels des foils.

Le chapitre 6 clôture le manuscrit en présentant la validation des outils numériques développées durant la thèse. Deux cas de validations sont considérés, un pour l'analyse de sections et un pour le modèle de poutre équivalente. Pour les deux cas, les résultats obtenus sont confrontés à ceux d'Abaqus^{TM}. Ce chapitre 6 montre que les outils numériques que nous avons développés permettent de s'affranchir d'Abaqus^{TM} pour les futurs études.

Les perspectives de ces travaux de thèse se décomposent en deux parties. Premièrement, une amélioration des modèles numériques car les simulations IFS réalisées dans cette thèse sont Quasi-Statique, ce qui limite la méthode d'évaluation des performances d'un foil. En effet, en navigation les foils sont soumis à d'importants phénomènes dynamiques, non pris en compte dans les modèles de cette thèse. Une version instationnaire de *PUFFIn*, en cours de développement à l'IRDl, permettra de simuler de simuler des conditions de navigations plus réalistes (écoulements instationnaires, foil perçant la surface libre, foil en mouvement, etc.). En parallèle, une version dynamique du modèle de poutre devra être développée pour prendre en compte les effets inertiels dans les simulations. Il serait également pertinent d'adapter le couplage IFS pour ajouter une aile supplémentaire dans les simulations. En reprenant l'exemple de l'aile d'IQFoil, la modélisation du stabilisateur représenterait plus fidèlement l'écoulement et permettrait également d'évaluer le couple qualifiant la stabilité de vol du foil.

Deuxièmement, des problèmes d'optimisation plus complexes seront définis et résolus, en augmentant le nombre de variables et d'objectifs. Des paramètres géométriques supplé-

mentaires peuvent être définis en rendant adaptables des entrées du modeleur, telles que la cambrure du profil, l'angle de *sweep*, etc. Pour les paramètres structurels, le nombre de plis orientables sera augmenté. Des paramètres pilotant le nombre de plis d'une certaine orientation seront également définis.

En plus de l'augmentation de la dimension du problème d'optimisation, il est également intéressant de considérer l'intégration de contraintes dans le problème . Cela peut par exemple être une limite sur la contrainte maximale atteinte dans les foils. Une autre contrainte pourrait également être définie à partir d'un critère de stabilité de route statique. Celui-ci serait défini en prédisant le comportement d'un foil pour une variation d'allure (gîte, vitesse ou assiette) imposée petite. En partant des résultats d'une simulation IFS convergée (foil déformé et calé), il est possible de faire varier arbitrairement la position (ou la vitesse) et de quantifier la variation des efforts verticaux et latéraux induite. L'objectif étant de minimiser cette variation pour pouvoir qualifier le foil de stable.

Finalement, il serait également intéressant de considérer une optimisation du foil en partant de ses propriétés équivalentes. Pour un problème de haute dimensions (>21), il est potentiellement intéressant d'optimiser directement les propriétés équivalentes du foil (21 valeurs) plutôt que ses propriétés réelles. Cela permettrait de réduire la dimension du problème et de converger plus vite vers un optimum. Cependant, il faudrait ensuite trouver la structure réelle associée aux propriétés équivalentes optimisées, ce qui représente un second problème d'optimisation. En amont de ce processus d'optimisation, il est pertinent d'étudier les variations des propriétés équivalentes en fonction de la géométrie et de la structure du foil. Cette étape est primordiale pour poser un problème d'optimisation de propriétés équivalentes avec des domaines de variabilité représentatif d'une structure réelle, cela permet de s'assurer de trouver une structure réelle associée à des propriétés équivalentes optimisées. De plus, une analyse des variations des propriétés équivalentes pourrait aboutir à l'établissement de relation entre des propriétés équivalentes et donc une réduction de la dimension du problème d'optimisation.

BIBLIOGRAPHIE

ARQUIN, Nicolas (2022), « Clément Bourgeois : "Il y a forcément un peu de regrets après ces Mondiaux iQFoil 2022" [Interview] », in : *Windmag*, URL : https://www.windmag.com/actu-clement-bourgeois-il-forcement-peu-regrets-apres-mondiaux-iqfoil-2022-interview.

AUSMAN, J.S. (1954), *Pressure Limitation on the Upper Surface of a Hydrofoil*, University of California, Berkeley, URL : https://books.google.fr/books?id=jctHAQAAMAAJ.

BAGHERPOUR, Tohid. et al. (2018), « Modeling of material bend-twist coupling on wind turbine blades », in : *Composite Structures* 193, p. 237-246, ISSN : 0263-8223, DOI : https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.071, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822317337170.

BAKICA, Andro, Šime MALENICA et Nikola VLADIMIR (2020), « Hydro-structure coupling of CFD and FEM - Quasi-static approach », in : *Ocean Engineering* 217, p. 108-118, ISSN : 0029-8018, DOI : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108118, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801820310556.

BAL, S. et S.A. KINNAS (2002), « A BEM for the prediction of free surface effects on cavitating hydrofoils », in : *Computational Mechanics* 28, p. 260-274, DOI : 10.1007/s00466-001-0286-7, URL : https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0036543230&doi=10.1007%2fs00466-001-0286-7&partnerID=40&md5=cb1d7edea24cab1c72055da50c681a40.

BAL, Sakir (juin 2023), « Numerical Investigation of Curved Tip Effect on the Performance of 3-D Cavitating Hydrofoils Moving under Free Surface », in : *Journal of Sailing Technology* 8.*01*, p. 39-64, ISSN : 2475-370X, DOI : 10.5957/jst/2023.8.3.39, eprint : https://onepetro.org/JST/article-pdf/8/01/39/3136565/sname-jst-2023-03.pdf, URL : https://doi.org/10.5957/jst/2023.8.3.39.

BASIC, Martina et al. (juill. 2020), « Impact of CFD simulation parameters in prediction of ventilated flow on a surface-piercing hydrofoil », in : *Ship Technology Research* 68, p. 1-13, DOI : 10.1080/09377255.2020.1798060.

Batoz, Jean-Louis, Klaus-Jürgen Bathe et Lee-Wing Ho (déc. 1980), « A Study of three-node triangular bending elements », in : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15, p. 1771-1812, doi : 10.1002/nme.1620151205.

Ben, Rubens (2024), « L'hydroptère d'Enrico Forlanini », in : *Paléo-Energétique*, url : https://paleo-energetique.org/paleoinventions/lhydroptere-denrico-forlanini/.

Billah, Khondokar (fév. 1991), « Resonance, Tacoma Narrows Bridge failure, and undergraduate physics textbooks », in : *American Journal of Physics - AMER J PHYS* 59, doi : 10.1119/1.16590.

Bishay, Peter et Christian Aguilar (sept. 2021), « Parametric Study of a Composite Skin for a Twist-Morphing Wing », in : *Aerospace* 8, p. 259, doi : 10.3390/aerospace8090259.

Blasques, José et Mathias Stolpe (nov. 2012), « Multi-material topology optimization of laminated composite beam cross sections », in : *Composite Structures* 94, p. 3278-3289, doi : 10.1016/j.compstruct.2012.05.002.

Blasques, José Pedro et Mathias Stolpe (2012), « Multi-material topology optimization of laminated composite beam cross sections », in : *Composite Structures* 94.*11*, p. 3278-3289, issn : 0263-8223, doi : https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.05.002, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822312002085.

Bonet, Javier et Richard Wood (mars 2008), *J. Bonet, R. D. Wood, Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK*, t. 24, isbn : 978-0521838702, doi : 10.1017/CBO9780511755446.

Bottasso, Carlo et al. (août 2012), « Optimization-based study of bend–twist coupled rotor blades for passive and integrated passive/active load alleviation », in : *Wind Energy* 16, doi : 10.1002/we.1543.

Boudreau, Matthieu, Maxime Picard-Deland et Guy Dumas (2020), « A parametric study and optimization of the fully-passive flapping-foil turbine at high Reynolds number », in : *Renewable Energy* 146, p. 1958-1975, issn : 0960-1481, doi : https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.08.013, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148119312005.

Chae, Eun Jung, Deniz Tolga Akcabay et Yin Lu Young (2017), « Influence of flow-induced bend–twist coupling on the natural vibration responses of flexible hydrofoils », in : *Journal of Fluids and Structures* 69, p. 323-340, issn : 0889-9746, doi : https:

//doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.12.008, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974616303139.

Cressie, Noel (avr. 1990), « The Origins of Kriging », in : *Mathematical Geology* 22, p. 239-252, DOI : 10.1007/BF00889887.

de Goeij, W.C., M.J.L. van Tooren et A. Beukers (1999), « Implementation of bending-torsion coupling in the design of a wind-turbine rotor-blade », in : *Applied Energy* 63.*3*, p. 191-207, ISSN : 0306-2619, DOI : https://doi.org/10.1016/S0306-2619(99)00016-1, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261999000161.

Deb, Kalyanmoy et al. (2002), « A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : NSGA-II », in : *IEEE transactions on evolutionary computation* 6.*2*, p. 182-197.

Deparday, Julien, Benoit Augier et Patrick Bot (2018), « Experimental analysis of a strong fluid–structure interaction on a soft membrane—Application to the flapping of a yacht downwind sail », in : *Journal of Fluids and Structures* 81, p. 547-564, ISSN : 0889-9746, DOI : https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.06.003, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974617307387.

Di Mascio, A., R. Broglia et R. Muscari (2007), « On the application of the single-phase level set method to naval hydrodynamic flows », in : *Computers and Fluids* 36.*5*, p. 868-886, ISSN : 0045-7930, DOI : https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2006.08.001, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793006000910.

Duncan, J. (juill. 1981), « An Experimental Investigation of Breaking Waves Produced by a Towed Hydrofoil », in : *Proceedings of The Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 377, p. 331-348, DOI : 10.1098/rspa.1981.0127.

Faltinsen, O.M. (jan. 2006), « Hydrodynamics of high-speed marine vehicles », in : *Hydrodynamics of High-Speed Marine Vehicles*, ISBN : 978-0-415-36304-4, p. 1-454, DOI : 10.1017/CBO9780511546068.

Fasse, Guillaume et al. (2024), « Multi-objective optimization of cycloidal blade-controlled propeller : An experimental approach », in : *Ocean Engineering* 299, p. 117363, ISSN : 0029-8018, DOI : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.117363, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801824007005.

Faye, Antoine et al. (août 2022), « Determination of the equivalent structural properties of a composite hydrofoil », in.

Faye, Antoine et al. (juin 2023a), « Equivalent beam finite element to model the mechanical behavior of composite hydrofoils », in : *MARINE 2023*.

Faye, Antoine et al. (mai 2023b), « Fluid-Structure Interactions response of a composite hydrofoil modelled with 1D beam finite elements », in : *INNOV'SAIL 2023*.

Faye, Antoine et al. (avr. 2024), « Fluid-Structure Interactions Response of a Composite Hydrofoil Modelled With 1D Beam Finite Elements », in : *Journal of Sailing Technology* 9, p. 19-41, DOI : 10.5957/jst/2024.9.1.19.

Faye, Antoine et al. (août 2025), « Equivalent Beam Finite Element Model to Assess the Mechanical Behavior of a Composite Hydrofoil », in : *Journal of Sailing Technology*.

Feil, Roland et al. (2020), « A cross-sectional aeroelastic analysis and structural optimization tool for slender composite structures », in : *Composite Structures* 253, p. 112755, ISSN : 0263-8223, DOI : https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112755, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822320326817.

Fonseca, C.M. et P.J. Fleming (1998), « Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. I. A unified formulation », in : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans* 28.*1*, p. 26-37, DOI : 10.1109/3468.650319.

Garg, Nitin et al. (mai 2017), « High-fidelity multipoint hydrostructural optimization of a 3-D hydrofoil », in : *Journal of Fluids and Structures* 71, p. 15-39, DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.001.

Gaurier, B. et al. (2010), *Essais combinés houle-courant. Caractérisation des conditions générées au bassin de Boulogne-sur-Mer*, Rapport technique.

Giavotto, Vittorio et al. (déc. 1983), « Anisotropic beam theory and applications », in : *Computers & Structures* 16, p. 403-413, DOI : 10.1016/0045-7949(83)90179-7.

GmbH, GOM (2018), *ARAMIS User Manual Hardware*, Precise Industrial 3D Metrology, Braunschweig, Germany : GOM GmbH, URL : https://www.gom.com.

Godø, John Martin Kleven et al. (2024), « Active wave energy extraction by hydrofoil vessels through deep reinforcement learning-based flight control », in : *Ocean Engineering* 312, p. 119236, ISSN : 0029-8018, DOI : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.119236, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801824025745.

Hairer, Ernst, Gerhard Wanner et Nørset Syvert P. (2008), *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, Berlin : Springer.

Han, Shilei et Olivier Bauchau (juill. 2015), « Nonlinear Three-Dimensional Beam Theory for Flexible Multibody Dynamics », in : *Multibody System Dynamics* 34, doi : 10.1007/s11044-014-9433-8.

Harwood, Casey M. et al. (2019), « The hydroelastic response of a surface-piercing hydrofoil in multi-phase flows. Part 1. Passive hydroelasticity », in : *Journal of Fluid Mechanics* 881, p. 313-364, doi : 10.1017/jfm.2019.691.

Hayat, Khazar et al. (2016), « Flutter performance of bend–twist coupled large-scale wind turbine blades », in : *Journal of Sound and Vibration* 370, p. 149-162, issn : 0022-460X, doi : https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.01.032, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X16000614.

Hess, John L. et A. M. O. Smith (sept. 1964), « Calculation of Nonlifting Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Bodies », in : *Journal of Ship Research* 8.*04*, p. 22-44, issn : 0022-4502, doi : 10.5957/jsr.1964.8.4.22, eprint : https://onepetro.org/JSR/article-pdf/8/04/22/2232748/sname-jsr-1964-8-4-22.pdf, url : https://doi.org/10.5957/jsr.1964.8.4.22.

Hillman, A. (2018), *The Foiling Dinghy Book : Dinghy Foiling from Start to Finish*, Start to Finish Series, Fernhurst Books Limited, isbn : 9781912177035, url : https://books.google.fr/books?id=MF2PswEACAAJ.

Hodges, Dewey (avr. 2006), *Nonlinear Composite Beam Theory*, AIAA, isbn : 978-1-56347-697-6, doi : 10.2514/4.866821.

Ibrahimbegovic, Adnan, Francois Frey et Ivica Kozar (jan. 1995), « Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations », in : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38.

J N Reddy, D. (2005), *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill Education, isbn : 9780072466850, url : https://books.google.fr/books?id=8gqnRwAACAAJ.

Johnston, Robert J. (1985), « HYDROFOILS », in : *Naval Engineers Journal* 97.*2*, p. 142-199, doi : https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1985.tb03398.x, eprint : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1559-3584.1985.tb03398.x, url : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1559-3584.1985.tb03398.x.

Jorge, Zabala, Peñafiel Ronny et Oscar Sotomayor (jan. 2022), « On the Digital Image Correlation Technique », in : *Materials Today : Proceedings* 49, p. 79-84, doi : 10.1016/j.matpr.2021.07.476.

Karim, Md. Mashud, Bijoy Prasad et Nasif Rahman (2014), « Numerical simulation of free surface water wave for the flow around NACA 0015 hydrofoil using the volume of fluid (VOF) method », in : *Ocean Engineering* 78, p. 89-94, issn : 0029-8018, doi : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2013.12.013, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801813004502.

Katz, Joseph et Allen Plotkin (2001), *Low-speed aerodynamics*, t. 13, Cambridge university press.

Kock, Ellen et Lorraine Olson (mars 1991), « Fluid-structure interaction analysis by the finite element method. A variational approach », in : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31, p. 463-491, doi : 10.1002/nme.1620310305.

Krenk, S. (2009), *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures*, Cambridge University Press, isbn : 9780521830546, url : https://books.google.fr/books?id=Z8jhqf9BpyAC.

Krige, D.G. (jan. 1978), « Lognormal de-Wijsian geostatistics for ore evaluation », in : *S. Afr. Inst. Min. Metall.* 1, p. 1-51.

Kumar, Sushrut et al. (mars 2025), « Mechanical Intelligence in Propulsion via Flexible Caudal Fins », in : doi : 10.48550/arXiv.2503.23652.

Modeling of Breaking And Post-breakingWaves On Slopes By Coupling of BEM And VOF Methods (mai 2003), t. All Days, International Ocean and Polar Engineering Conference, ISOPE-I-03-252, eprint : https://onepetro.org/ISOPEIOPEC/proceedings-pdf/ISOPE03/All-ISOPE03/ISOPE-I-03-252/1873493/isope-i-03-252.pdf.

Langre, E. de (2001), *Fluides et solides*, Ecole Polytechnique, isbn : 9782730208338, url : https://books.google.fr/books?id=IFnLwQ4eTIwC.

Leroux, Jean-Baptiste, O. Coutier-Delgosha et Jacques Astolfi (mai 2005), « A joint experimental and numerical study of mechanisms associated to instability of partial cavitation on two-dimensional hydrofoil », in : *Physics of Fluids* 17, doi : 10.1063/1.1865692.

Liao, Yingqian, Joaquim Martins et Yin Young (avr. 2021), « 3-D High-Fidelity Hydrostructural Optimization of Cavitation-Free Composite Lifting Surfaces », in : *Composite Structures* 268, p. 113937, doi : 10.1016/j.compstruct.2021.113937.

— (mars 2023), « Hydrostructural optimization of single-layer and multi-layer composite lifting surfaces », in : *Composite Structures* 307, p. 116650, DOI : 10.1016/j.compstruct.2022.116650.

LIAO, Yingqian, Joaquim MARTINS et Yin Lu YOUNG (sept. 2019a), « Sweep and Anisotropy Effects on the Viscous Hydroelastic Response of Composite Hydrofoils », in : *Composite Structures* 230, p. 111471, DOI : 10.1016/j.compstruct.2019.111471.

LIAO, Yingqian et al. (mars 2019b), « Viscous Fluid Structure Interaction Response of Composite Hydrofoils », in : *Composite Structures* 212, DOI : 10.1016/j.compstruct.2019.01.043.

— (mars 2019c), « Viscous Fluid Structure Interaction Response of Composite Hydrofoils », in : *Composite Structures* 212, DOI : 10.1016/j.compstruct.2019.01.043.

LIAO, Yingqian et al. (2022), « RANS-based optimization of a T-shaped hydrofoil considering junction design », in : *Ocean Engineering* 262, p. 112051, ISSN : 0029-8018, DOI : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112051, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801822013816.

LIU, Zhen, Hengliang QU et Hongda SHI (2020), « Energy-harvesting performance of a coupled-pitching hydrofoil under the semi-passive mode », in : *Applied Energy* 267, p. 114889, ISSN : 0306-2619, DOI : https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.114889, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261920304013.

LOTHODE, Corentin et al. (mai 2013), « Fluid structure interaction analysis of an hydrofoil », in : *Marine 2013*.

LOUIS, N. et al. (2025), « "Réduire de 20 la consommation des navires" : cette startup teste une nageoire inspirée des baleines », in : *France Bleu*, URL : https://www.francebleu.fr/infos/societe/video-reduire-de-20-la-consommation-des-navires-cette-startup-teste-une-nageoire-inspiree-des-baleines-4667861.

MÄKINEN, Jari et Heikki MARJAMÄKI (juin 2008), « Total and Updated Lagrangian Geometrically Exact Beam Elements », in : p. 658-658, ISBN : 978-1-4020-4994-1, DOI : 10.1007/1-4020-5370-3_658.

MARIMON GIOVANNETTI, Laura et al. (mars 2022), « Fluid-Structure Interaction of a Foiling Craft », in : *Journal of Marine Science and Engineering* 10, p. 372, DOI : 10.3390/jmse10030372.

MARTY, Antoine et al. (sept. 2021), « Experimental study of hard marine growth effect on the hydrodynamical behaviour of a submarine cable », in : *Applied Ocean Research* 114, p. 102810, DOI : 10.1016/j.apor.2021.102810.

MASSEY, B.S. (1986), *Measures in Science and Engineering : Their Expression, Relation, and Interpretation*, Ellis Horwood series in mathematics and its applications, E. Horwood, ISBN : 9780745800745, URL : https://books.google.fr/books?id=SfZQAAAAMAAJ.

MATA ALMONACID, Pablo, Sergio OLLER et Alex BARBAT (sept. 2007), « Static analysis of beam structures under nonlinear geometric and constitutive behavior », in : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, p. 4458-4478, DOI : 10.1016/j.cma.2007.05.005.

MATHERON, Georges (déc. 1963a), « Principles of geostatistics », in : *Economic Geology* 58.*8*, p. 1246-1266, ISSN : 0361-0128, DOI : 10.2113/gsecongeo.58.8.1246, eprint : https://pubs.geoscienceworld.org/segweb/economicgeology/article-pdf/58/8/1246/3481854/1246.pdf, URL : https://doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246.

— (déc. 1963b), « Principles of geostatistics. Econ Geol (Lancaster) », in : *Economic Geology* 58, p. 1246-1266, DOI : 10.2113/gsecongeo.58.8.1246.

MATHISEN, Kjell Magne et al. (2017), « A comparative study of beam element formulations for nonlinear analysis : corotatinal vs. geometrically exact formulations », in : URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59488924.

MATVEEV, Konstantin, Miles WHEELER et Tao XING (fév. 2019), « Numerical simulation of air ventilation and its suppression on inclined surface-piercing hydrofoils », in : *Ocean Engineering* 175, p. 251-261, DOI : 10.1016/j.oceaneng.2019.02.040.

MBH, GOM (2011), *ATOS Compact Scan 5M, 2M - User Manual Hardware*, With Camera Supports 300 mm, 500 mm, and SO, Braunschweig, Germany : GOM mbH, URL : https://www.gom.com.

MCKAY, M. D., R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER (1979), « A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code », in : *Technometrics* 21.*2*, p. 239-245, ISSN : 00401706, URL : http://www.jstor.org/stable/1268522 (visité le 10/03/2025).

MENARD, Bruno (2019), « Vendée Globe. Yannick Bestaven rachète Safran II et sera "un très bon outsider" », in : *Voiles et voiliers*, URL : https://voilesetvoiliers.ouest-france.fr/course-au-large/vendee-globe/vendee-globe-yannick-bestaven-

rachete-safran-ii-et-sera-un-tres-bon-outsider-18610e18-1b23-11e9-b078-7f07a190ceca.

Michalewicz, Zbigniew et Marc Schoenauer (mars 1996), « Schoenauer, M. : Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. Evolutionary Computation 4(1), 1-32 », in : *Evolutionary Computation* 4, p. 1-32, doi : 10.1162/evco.1996.4.1.1.

Mivehchi, Amin, Jason Dahl et Stephen Licht (2016), « Heaving and pitching oscillating foil propulsion in ground effect », in : *Journal of Fluids and Structures* 63, p. 174-187, issn : 0889-9746, doi : https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.007, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974615300657.

Mohammed Arab, Fatiha (déc. 2020), « Contrôle actif par pression interne des performances hydrodynamiques et de l'apparition de la cavitation d'un hydrofoil composite déformable en composite », PhD Thesis, UBO.

Nelder, J.A. et RA Mead (jan. 1965), « A Simplex Method for Function Minimization Comput », in : *The Computer Journal* 7, doi : 10.1093/comjnl/7.4.308.

Newman, John Nicholas (2018), *Marine hydrodynamics*, The MIT press.

Ng, Galen, Joaquim Martins et Yin Young (août 2022), « Optimizing steady and dynamic hydroelastic performance of composite foils with low-order models », in : *Composite Structures* 301, p. 116101, doi : 10.1016/j.compstruct.2022.116101.

Ni, Zao, Manhar Dhanak et Tsung-chow Su (2021), « Performance of a hydrofoil operating close to a free surface over a range of angles of attack », in : *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 13, p. 1-11, issn : 2092-6782, doi : https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2020.11.002, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2092678220300509.

Panteli, Anthoula et al. (déc. 2022), « Comparative study of two geometrically nonlinear beam approaches for the coupled wind turbine system », in : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 231, p. 105231, doi : 10.1016/j.jweia.2022.105231.

Passos, Adriano et Marco Luersen (mars 2018), « Multiobjective optimization of laminated composite parts with curvilinear fibers using Kriging-based approaches », in : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 57, p. 1-13, doi : 10.1007/s00158-017-1800-7.

Pehlivan Solak, Hayriye et al. (juin 2023), « Hydrofoil Optimization via Automated Multi-Fidelity Surrogate Models », in : DOI : 10.23967/marine.2023.136.

Perali, Paolo et al. (avr. 2024a), « Experimental and Numerical Study of the Flow Around Rigid and Flexible Hydrofoils for Wetted and Cavitating Flow Conditions », in : *Journal of Fluids Engineering* 146, p. 1-64, DOI : 10.1115/1.4065296.

Perali, Paolo et al. (août 2024b), « Performance prediction of a hydrofoil near the free surface using low (BEM) and high (RANS) fidelity methods », in : *Applied Ocean Research* Vol. 151, DOI : 10.1016/j.apor.2024.104157.

Pernod, Laetitia et al. (nov. 2019), « Experimental and Numerical Investigation of the Fluid-Structure Interaction on a Flexible Composite Hydrofoil under Viscous Flows », in : *Ocean Engineering* 194, DOI : 10.1016/j.oceaneng.2019.106647.

Pernod, Laetitia et al. (jan. 2023), « Free-Surface Effects on Two-Dimensional Hydrofoils by RANS-VOF Simulations », in : *Journal of Sailing Technology* 8.*01*, p. 24-38, ISSN : 2475-370X, DOI : 10.5957/jst/2023.8.2.24, eprint : https://onepetro.org/JST/article-pdf/8/01/24/3065321/sname-jst-2023-02.pdf, URL : https://doi.org/10.5957/jst/2023.8.2.24.

Ploé, Patrick (2018), « Surrogate-based optimization of hydrofoil shapes using RANS simulations », 2018ECDN0012, thèse de doct., URL : http://www.theses.fr/2018ECDN0012/document.

PUFFIn documentation (2023), URL : https://www.ensta-bretagne.fr/fr/optifoil.

Rasmussen, Carl et Christopher Williams (nov. 2005), *Gaussian Processes for Machine Learning*, ISBN : 9780262256834, DOI : 10.7551/mitpress/3206.001.0001.

Reddy, J.N. (2003), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells : Theory and Analysis, Second Edition*, Taylor & Francis, ISBN : 9780849315923, URL : https://books.google.fr/books?id=Wk-mmgEACAAJ.

Reddy, Junuthula Narasimha (2006), *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press.

Renaud, Paul, Matthieu Sacher et Yves-Marie Scolan (2022), « Multi-objective hull form optimization of a SWATH configuration using surrogate models », in : *Ocean Engineering* 256, p. 111209, ISSN : 0029-8018, DOI : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111209, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801822006096.

ROACHE, P.J. (sept. 1994), « Perspective : A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies », in : *Journal of Fluids Engineering-transactions of The Asme - J FLUID ENG* 116, p. 405-413, DOI : 10.1115/1.2910291.

SACHER, Matthieu (2018), « Méthodes avancées d'optimisation par méta-modèles – Applicationà la performance des voiliers de compétition », 2018ENAM0032, thèse de doct., URL : http://www.theses.fr/2018ENAM0032/document.

SACHER, Matthieu et al. (fév. 2017), « Efficient optimization procedure in non-linear fluid-structure interaction problem : Application to mainsail trimming in upwind conditions », in : *Journal of Fluids and Structures* 69, p. 209-231, DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2016.12.006.

SACHER, Matthieu et al. (oct. 2018a), « A Classification Approach to Efficient Global Optimization in Presence of Non-Computable Domains », in : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58, DOI : 10.1007/s00158-018-1981-8.

SACHER, Matthieu et al. (juin 2018b), « Flexible hydrofoil optimization for the 35 th America's Cup with constrained EGO method », in : *Ocean Engineering* 157, p. 62-72, DOI : 10.1016/j.oceaneng.2018.03.047.

SACHER, Matthieu et al. (avr. 2020), « A fast and robust approach to compute nonlinear Fluid-Structure Interactions on yacht sails – Application to a semi-rigid composite mainsail », in : *Ocean Engineering* 201, DOI : 10.1016/j.oceaneng.2020.107139.

SPEER, Thomas (jan. 2001), « The Basiliscus Project - Return of the Cruising Hydrofoil Sailboat », in : DOI : 10.5957/CSYS-2001-013.

STÄBLEIN, Alexander R. (2016), « Analysis and Design of Bend-Twist Coupled Wind Turbine Blades », in : *MARE-WINT : New Materials and Reliability in Offshore Wind Turbine Technology*, sous la dir. de Wiesław OSTACHOWICZ et al., Cham : Springer International Publishing, p. 67-80, ISBN : 978-3-319-39095-6, DOI : 10.1007/978-3-319-39095-6_5, URL : https://doi.org/10.1007/978-3-319-39095-6_5.

TEMTCHING TEMOU, Vanilla (2020), « Etude expérimentale et numérique des interactions fluide-structure sur des hydrofoils flexibles en composite », PhD Thesis, UBO, URL : http://www.theses.fr/2020BRES0043/document.

TRIANTAFYLLOU, Michael, Alexandra TECHET et Franz HOVER (août 2004), « Review of Experimental Work in Biomimetic Foils », in : *Oceanic Engineering, IEEE Journal of* 29, p. 585-594, DOI : 10.1109/JOE.2004.833216.

TURNOCK, S. et al. (oct. 2009), « Morphing of 'flying' shapes for autonomous underwater and aerial vehicles », in : *NATO RTO Modelling and Simulation Conference*.

Uslu, Yasin et Sakir Bal (jan. 2008), « Numerical Prediction of Wave Drag of 2-D and 3-D Bodies under or on a Free Surface », in : *Env. Sci* 32, p. 177-188.

Vanilla, Temtching, Benoit Augier et Benoit Paillard (fév. 2021), « Hydro-elastic response of composite hydrofoil with FSI », in : *Ocean Engineering* 221, p. 108230, doi : 10.1016/j.oceaneng.2020.108230.

Vinson, J.R. et R.L. Sierakowski (2002), *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Solid Mechanics and Its Applications, Springer, isbn : 9781402009044, url : https://books.google.fr/books?id=D742KUQznDEC.

Volovoi, Vitali et al. (mai 2001), « Assessment of beam modeling methods for rotor blade applications », in : *Mathematical and Computer Modelling* 33, p. 1099-1112, doi : 10.1016/S0895-7177(00)00302-2.

Wang, Qi et al. (mars 2017), « BeamDyn : a high-fidelity wind turbine blade solver in the FAST modular framework : BeamDyn : a high-fidelity wind turbine blade solver », in : *Wind Energy* 20, doi : 10.1002/we.2101.

Weisshaar, Terrence et Brian Foist (mars 1985), « Vibration tailoring of advanced composite lifting surfaces », in : *Journal of Aircraft* 22, doi : 10.2514/3.45098.

Wiens, Marcus, Tobias Meyer et Jan Wenske (2020), « Exploiting Bend-Twist Coupling in Wind Turbine Control for Load Reduction∗∗This research was carried out in the scope of the SmartBlades2 project (0325601A/B/C/D), funded by the German Federal Ministry for Economic Affairs and Energy (BMWi) based on a decision of the Parliament of the Federal Republic of Germany. », in : *IFAC-PapersOnLine* 53.*2*, 21st IFAC World Congress, p. 12139-12144, issn : 2405-8963, doi : https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.781, url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320311058.

Xie, Nan et Dracos Vassalos (juin 2007), « Performance analysis of 3D hydrofoil under free surface », in : *Ocean Engineering* 34, p. 1257-1264, doi : 10.1016/j.oceaneng.2006.05.008.

Young, Yin Lu et al. (oct. 2017), « Load-Dependent Bend-Twist Coupling Effects on the Steady-state Hydroelastic Response of Composite Hydrofoils », in : *Composite Structures* 189, doi : 10.1016/j.compstruct.2017.09.112.

Yu, Wenbin et Maxwell Blair (sept. 2012a), « GEBT : A general-purpose nonlinear analysis tool for composite beams », in : *Composite Structures* 94, p. 2677-2689, doi : 10.1016/j.compstruct.2012.04.007.

Yu, Wenbin, Dewey Hodges et Jimmy Ho (oct. 2012b), « Variational asymptotic beam sectional analysis – An updated version », in : *International Journal of Engineering Science* 59, p. 40-64, DOI : 10.1016/j.ijengsci.2012.03.006.

Zhang, Hanzhe et al. (2018), « Numerical investigation of the deformation characteristics of a composite hydrofoil with different ply angles », in : *Ocean Engineering* 163, p. 348-357, ISSN : 0029-8018, DOI : https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.05.064, URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801818309363.

ANNEXE 1 : RELATION ENTRE LES CONFIGURATIONS INITIALE ET DÉFORMÉE

Les équations intégrales de la MEF s'expriment dans la base e ou E en fonction de l'approche considérée. Le passage d'une base à l'autre est détaillée dans cette Annexe. Pour commencer, la relation entre deux volumes élémentaires exprimés dans la base e et E est développée. La relation entre les vecteurs élémentaires des bases e et E est donnée par le tenseur du gradient de transformation $\boldsymbol{F}$ telle que :

$$d\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{E_1}; \quad d\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{E_2}; \quad d\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{E_3} \tag{1}$$

Le volume élémentaire dans une base est défini comme le triple produit des vecteurs élémentaires de la base.

$$dv = d\boldsymbol{e_1} \cdot (d\boldsymbol{e_2} \times d\boldsymbol{e_3}); \quad dV = d\boldsymbol{E_1} \cdot (d\boldsymbol{E_2} \times d\boldsymbol{E_3}) \tag{2}$$

Le volume élémentaire dv est réécrit à l'aide du gradient de transformation $\boldsymbol{F}$:

$$dv = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{E_1} \cdot (\boldsymbol{F}d\boldsymbol{E_2} \times \boldsymbol{F}d\boldsymbol{E_3}) \tag{3}$$

Le développement de cette expression permet d'obtenir la relation suivante :

$$dv = det(\boldsymbol{F})dV = JdV \tag{4}$$

Dans la littérature, le déterminant du gradient de transformation est majoritairement noté J. De plus, le déterminant de la matrice construite avec les vecteurs $d\boldsymbol{E_1}$, $d\boldsymbol{E_2}$ et $d\boldsymbol{E_3}$ est par définition le volume élémentaire dV associé à la base initiale E. En notant ρ_0 et ρ les masses volumiques du solide avant et après déformation, la conservation de la masse s'exprime tel que :

$$\rho dv = \rho_0 dV; \quad \rho_0 = J\rho \tag{5}$$

Une relation analogue à l'équation (1) permettant l'expression de ds en fonction de dS est maintenant développée. Pour ce faire, les vecteurs de surface élémentaire $d\boldsymbol{s}$ et $d\boldsymbol{S}$ sont définis tels que :

$$d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}ds; \quad d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}dS \tag{6}$$

Les vecteurs élémentaires $d\boldsymbol{l}$ et $d\boldsymbol{L}$ sont introduits ici afin de relier le volume élémentaire à la surface élémentaire, illustrée dans la figure 4. Par définition (équation (3.2)), les expressions des vecteurs $d\boldsymbol{l}$ et $d\boldsymbol{L}$ sont reliées par le gradient de transformation $\boldsymbol{F}$.

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{L} \tag{7}$$

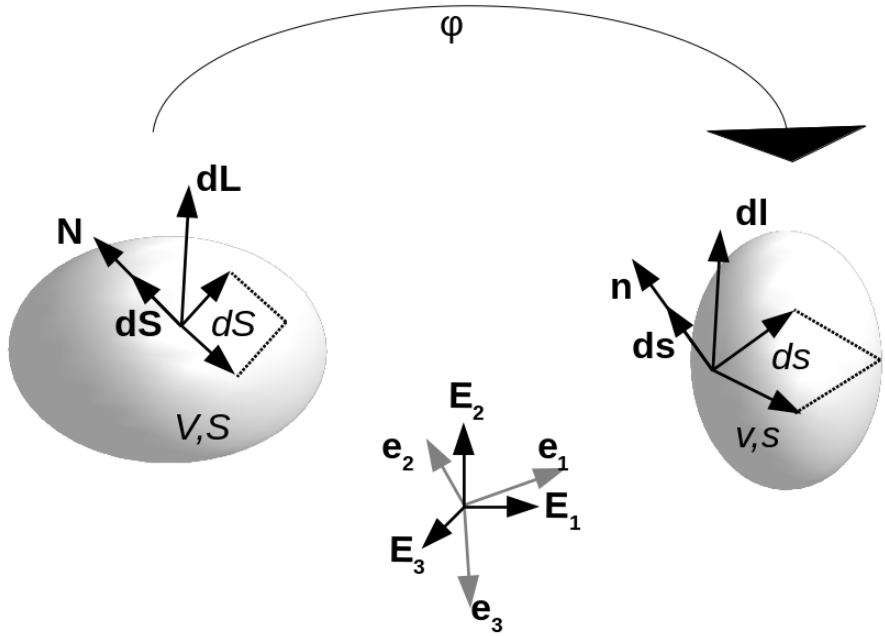


FIGURE 4 – Changement d'aire élémentaire.

Les volumes élémentaires dv et dV sont alors exprimés tels que :

$$dV = d\boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{S}; \quad dv = d\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{s} = J dV \tag{8}$$

$$J d\boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$J d\boldsymbol{L}^T d\boldsymbol{S} = (d\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{F}^T) d\boldsymbol{s}$$

$$J d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{s}$$

$$J \boldsymbol{F}^{-T} d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{s}$$

ANNEXE 2 : ÉQUILIBRE DES EFFORTS

Dans cette Annexe, les équations d'équilibre des efforts et des moments appliqués à la structure sont définies. Pour ce faire, la figure 5 illustre un domaine élémentaire de volume v limité par une surface s. Les vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}$ représentent respectivement le vecteur normal à la surface et le vecteur contrainte en un point de la surface. Les forces de volume agissant sur le volume élémentaire sont notées $\boldsymbol{f}$. Le vecteur $\boldsymbol{v}$ représente quant à lui le champ de vitesse des points du solide.

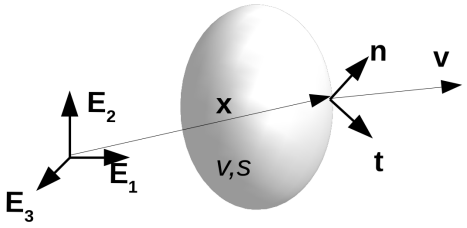


FIGURE 5 – Volume élémentaire.

En considérant une approche Lagrangienne, le principe fondamentale de la dynamique sur un volume infinitésimal de masse volumique $\rho(\boldsymbol{x})$ appartenant à un corps s'exprime tel que :

$$\int_s \boldsymbol{t} ds + \int_v \boldsymbol{f} dv = \int_v \rho \dot{\boldsymbol{v}} dv \tag{9}$$

L'effort de traction tangentiel $\boldsymbol{t}$ est relié à la normale de la surface $\boldsymbol{n}$ par le tenseur de contraintes de Cauchy notée $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} \tag{10}$$

L'équation (9) peut alors être réécrite telle que :

$$\int_s \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} ds + \int_v \boldsymbol{f} dv - \int_v \rho \dot{\boldsymbol{v}} dv = 0 \tag{11}$$

En appliquant le théorème de Gauss, l'équation (11) permet de formuler une équation différentielle régissant l'équilibre translationnel du volume élémentaire. Ce volume est

arbitrairement choisi, ce qui implique que cette équation est vraie en tout point du corps (Bonet et al. 2008).

$$div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{f} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \textbf{avec} \quad div(\boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Afin de trouver l'équation différentielle régissant l'équilibre des moments, il suffit de réécrire l'équation (11) en considérant le produit vectoriel avec le vecteur position $\boldsymbol{x}$ permettant le calcul des moments.

$$\int_s \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} ds + \int_v \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f} dv - \int_v \boldsymbol{x} \times \rho\dot{\boldsymbol{v}} dv = 0 \tag{13}$$

L'équation (13) est valide uniquement s'il n'y a pas de densité de couples locaux dans le solide. L'introduction de la matrice antisymétrique $\tilde{\boldsymbol{x}}$ construite à partir des composantes du vecteur position $\boldsymbol{x}$ exprimées dans e permet l'application du théorème de Gauss :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Ainsi,

$$\int_s \tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} ds + \int_v \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f} - \rho\dot{\boldsymbol{v}}) dv = 0 \tag{15}$$

En utilisant l'équation (12) pour substituer $(\boldsymbol{f} - \rho\dot{\boldsymbol{v}})$ dans l'équation (15),le théorème de Gauss permet d'obtenir l'équation (16). De la même manière que pour l'équation (12), cette équation se généralise à l'ensemble du corps car le choix du volume d'intégration est arbitraire.

$$div(\tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\boldsymbol{x}} div(\boldsymbol{\sigma}) \tag{16}$$

L'introduction de la notation d'Einstein permet la simplification de l'équation (16).

$$\begin{aligned} div(\tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\sigma}) &= (\tilde{x}_{ik}\sigma_{kj})_{,j} \\ &= \tilde{x}_{ik}\sigma_{kj,j} + \tilde{x}_{ik,j}\sigma_{kj} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} div(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{x}_{ik}\sigma_{kj,j} \tag{18}$$

Ce qui implique :

$$\tilde{x}_{ik,j}\sigma_{kj} = 0 \quad \forall i = 1,2,3 \tag{19}$$

Le développement de l'équation (19) permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad ; \quad \sigma_{21} = \sigma_{21} \tag{20}$$

En d'autres termes, cela signifie que, en l'absence de densité de couples locaux, l'équilibre des moments impose la symétrie de la matrice de raideur de Cauchy.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \tag{21}$$

ANNEXE 3 : DÉVELOPPEMENT DU PTV

Le PTV se développe en intégrant le produit scalaire d'un champ de déplacement virtuel $\delta \boldsymbol{u}$ avec l'équation d'équilibre translationnel local des efforts appliqués sur le solide (cf. équation (12)). Ce produit scalaire donne l'expression du travail virtuel des efforts appliqués sur le solide.

$$\delta \mathcal{W} = \int_v \delta \boldsymbol{u} \cdot div(\boldsymbol{\sigma}) dv + \int_v \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} dv - \int_v \delta \boldsymbol{u} \cdot \rho \dot{\boldsymbol{v}} dv = 0 \tag{22}$$

Il est pertinent de rappeler que l'équilibre des moments implique la symétrie du tenseur de contraintes ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$). En utilisant le théorème de Gauss et le fait que $div(\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{u}) = \delta \boldsymbol{u} \cdot div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}$, le terme de gauche de l'équation (22) devient :

$$\int_v \delta \boldsymbol{u} \cdot div(\boldsymbol{\sigma}) dv = \int_v div(\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{u}) dv - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} dv \tag{23}$$

Il est possible de réexprimer le terme $\dfrac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}$ de l'équation (23) à l'aide du tenseur du gradient de transformation.

$$\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \delta \boldsymbol{F} \boldsymbol{F}^{-1} \tag{24}$$

D'après le théorème de Gauss, la définition du vecteur contrainte (cf. équation (10)) et la symétrie du tenseur de contraintes de Cauchy, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_v div(\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{u}) dv &= \int_s \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} ds \\ &= \int_s \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{u} ds \\ &= \int_s \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{u} ds = \int_s \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} ds \end{aligned} \tag{25}$$

Donc,

$$\delta\mathcal{W} = \underbrace{\int_s \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}ds + \int_v \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}dv}_{\delta\mathcal{W}_{ext}} - \underbrace{\int_v \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1})dv}_{\delta\mathcal{W}_{int}} - \underbrace{\int_v \delta\boldsymbol{u}\cdot\rho\dot{\boldsymbol{v}}dv}_{\delta\mathcal{W}_{ext}} = 0 \qquad (26)$$

L'équation (26) explicite les différentes contributions du travail virtuel. La travail virtuel total est défini comme la différence du travail virtuel des efforts externes $\delta\mathcal{W}^{ext}$ et de la somme des travaux virtuels des efforts internes $\delta\mathcal{W}^{int}$ et d'inertie $\delta\mathcal{W}^{cin}$. Cette équation énonce le PTV, en y substituant des expressions discrétisées des champs continus (tel que $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ ou encore $\boldsymbol{X}$), les équations de la MEF sont établies. Il existe également le principe des puissances virtuels (PPV), qui se met en place de la même manière que le PTV en choisissant un champ de vitesse virtuel $\delta\boldsymbol{v}$ comme fonction test. Le PTV et le PPV amènent aux mêmes équations d'équilibre.

Annexe 4 : Formulation alternative du PTV

Dans cette Annexe, le PTV énoncé dans l'équation (3.9) est réexprimé dans la configuration initiale pour faire apparaître les mesures de contraintes de Piola-Kirchhoff. La formulation de l'intégrale volumique dans le repère matériel est directe en utilisant le déterminant du tenseur de gradient de transformation J (cf. équation (3.3)). Pour réexprimer l'intégrale surfacique, il faut trouver la relation entre ds et dS à partir de la définition du gradient de transformation ($\boldsymbol{FN} = \boldsymbol{n}$) et des équations (6) et (8).

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{s} &= J\boldsymbol{F}^{-1}d\boldsymbol{S} \\
\boldsymbol{n}ds &= J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{N}dS \\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}ds^2 &= J^2(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{N})dS^2 \\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}ds^2 &= J^2(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{N})dS^2 \\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}ds^2 &= J^2(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{N})dS^2 \\
ds^2 &= J^2(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})dS^2 \\
ds &= J\sqrt{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N}}dS
\end{aligned} \tag{27}$$

Le PTV se réexprime alors tel que :

$$\delta\mathcal{W} = \int_S \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t_0}dS + \int_V J\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}dV - \int_V J\delta\boldsymbol{u}\cdot\rho\dot{\boldsymbol{v}}dV - \int_V J\boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1})dV \tag{28}$$

Avec,

$$\boldsymbol{t_0} = J\sqrt{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N}}\boldsymbol{t} \tag{29}$$

La première mesure de contrainte alternative introduite est le tenseur de contraintes de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, équivalent aux contraintes de Cauchy exprimées dans le repère matériel.

Celui-ci est défini à partir de l'équation (28) tel que :

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \tag{30}$$

Il est également possible de réexprimer le travail virtuel des efforts internes en isolant le terme $\delta\boldsymbol{F}$. Pour ce faire, la propriété suivante du produit tensoriel doublement contracté est utilisée : pour deux tenseurs de même dimension notés $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, dont l'un est symétrique,

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{A} = Tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) = Tr(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}) = Tr(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T) = Tr(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}) \tag{31}$$

Le travail virtuel des efforts internes devient alors :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{int} &= \int_V Tr(J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}\delta\boldsymbol{F}^T)dV \\
&= \int_V J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} : \delta\boldsymbol{F}dV \\
&= \int_V \boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F}dV \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}
\end{aligned} \tag{32}$$

Dans l'équation (32), le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{P}$, conjuguée au tenseur du gradient de transformation, est défini. Pour interpréter cette mesure de contraintes, il faut d'abord considérer une force interne élémentaire $d\boldsymbol{p}$ défini dans la configuration déformée comme le produit du tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du vecteur surface élémentaire $d\boldsymbol{s}$ où la force interne est calculée. La relation entre les vecteurs surfaces élémentaires exprimés dans la configuration de référence et la configuration déformée est donnée par l'équation (8).

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{s} \tag{33}$$

$$d\boldsymbol{p} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}d\boldsymbol{S} \tag{34}$$

L'équation (33) montre que le premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff fait le lien entre une surface élémentaire de la configuration de référence et un effort interne élémentaire exprimé dans la configuration courante.

Afin de définir le second tenseur de Piola-Kirchhoff, le travail virtuel des efforts internes est réécrit de manière le tenseur de déformation de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$. Pour ce faire, le

premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff est multiplié par $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}$ dans l'expression du travail virtuel des efforts internes de l'équation (32) :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{int} &= \int_V \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F} dV \\
&= \int_V Tr(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^T : \delta\boldsymbol{F} dV \\
&= \int_V \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F} dV \\
&= \int_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}) dV
\end{aligned} \tag{35}$$

Il est pertinent de démontrer la symétrie du tenseur $\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P}$ pour la suite des développements :

$$(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{F}^{-T} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{F}^{-T} = \boldsymbol{F}^{-1}(J\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{F}^{-T}) = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{36}$$

Cela permet de réécrire l'équation (35) telle que :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{int} &= \int_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}) + \frac{1}{2}((\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P})^T : \boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}) dV \\
&= \int_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}) dV \\
&= \int_V \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : (\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})) dV \\
&= \int_V \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{E} dV
\end{aligned} \tag{37}$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$, conjugué au tenseur de contraintes de Green-Lagrange est donc défini par :

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{-T} \tag{38}$$

Le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$, défini dans l'équation (38), relie un vecteur surface élémentaire à un effort interne élémentaire, tous deux exprimés dans

la configuration de référence. Celui-ci est symétrique, de la même manière que le tenseur de contraintes de Cauchy ($\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T$).

Pour conclure cette Annexe, les expressions du PTV pour les différentes mesures de contraintes sont listées.

— Tenseur de contraintes de Kirchhoff :

$$\delta\mathcal{W} = \int_S \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t_0} dS + \int_V J\delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} dV - \int_V J\delta\boldsymbol{u} \cdot \rho\dot{\boldsymbol{v}} dV - \int_V \boldsymbol{\tau} : (\delta\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}) dV = 0 \quad (39)$$

— Premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\delta\mathcal{W} = \int_S \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t_0} dS + \int_V J\delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} dV - \int_V J\delta\boldsymbol{u} \cdot \rho\dot{\boldsymbol{v}} dV - \int_V \boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F} dV = 0 \quad (40)$$

— Second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\delta\mathcal{W} = \int_S \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t_0} dS + \int_V J\delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} dV - \int_V J\delta\boldsymbol{u} \cdot \rho\dot{\boldsymbol{v}} dV - \int_V \boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{E} dV = 0 \quad (41)$$

ANNEXE 5 : DISCRÉTISATION DES TRAVAUX VIRTUELS SUR UN ÉLÉMENT

Connaissant les expressions discrétisées des quantités cinématiques, détaillées dans la section 3.1.5, le PTV discrétisé s'obtient en substituant ces expressions dans le PTV formulé dans l'équation (3.9). Pour plus de clarté, les trois contributions du travail virtuel sont discrétisées séparément en considérant un seul élément. La généralisation à un ensemble d'éléments est abordée par la suite.

Travail virtuel des efforts inertiels

L'expression de la contribution des efforts inertiels au travail virtuel est rappelée dans l'équation (42) et il est possible d'y substituer les expressions discrétisées des champs d'accélération et de déplacement virtuel (à partir des équations (3.23) et (3.24)). L'expression de la contribution des efforts d'inertie au travail virtuel pour un élément fini avec N_n nœuds s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{el}^{cin} &= \int_{v_{el}} \delta\boldsymbol{u}\cdot\rho\dot{\boldsymbol{v}}dv = \int_{v_{el}} \delta\boldsymbol{u}^T\rho\dot{\boldsymbol{v}}dv \\ &= \int_{v_{el}} \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\boldsymbol{N}^{f^T}\rho\boldsymbol{N}^f\dot{\boldsymbol{v}^{el}}dv = \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\int_{v_{el}}\rho\boldsymbol{N}^{f^T}\boldsymbol{N}^f dv\dot{\boldsymbol{v}^{el}}\end{aligned} \tag{42}$$

La discrétisation du terme d'inertie du PPV permet de faire apparaître la notion de matrice de masse $\boldsymbol{M}^{el}$ d'un élément fini. Celle-ci est définie en considérant que la contribution des efforts inertiels à la puissance virtuelle se décompose tel que :

$$\delta\mathcal{W}_{el}^{cin} = \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\boldsymbol{f}_{el}^{cin} = \delta\boldsymbol{u}^{el^T}\boldsymbol{M}^{el}\dot{\boldsymbol{v}^{el}};\quad \boldsymbol{M}^{el} = \int_{v_{el}}\rho\boldsymbol{N}^{f^T}\boldsymbol{N}^f dv \tag{43}$$

Dans l'équation (43), $\boldsymbol{f}_{el}^{cin}$ est le vecteur des efforts nodaux d'inertie, défini comme le produit de la matrice de masse de l'élément avec le vecteur d'accélération nodal. Sa construction est analogue à celle du vecteur des positions nodales explicitée dans l'équation

(3.22). La matrice de masse peut être évaluée dans le repère courant ou initial, le passage d'une formulation à l'autre se fait grâce à la l'équation (3.3), explicitant la relation entre un volume élémentaire de la configuration initiale et déformée.

$$\boldsymbol{M}^{el} = \int_{V_{el}} J\rho \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{N}^f dV = \int_{V_{el}} \rho_0 \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{N}^f dV \tag{44}$$

Travail virtuel des efforts internes

Pour discrétiser la contribution des efforts internes au travail virtuel, le point de départ est la formulation de $\delta\mathcal{W}^{int}$ (cf. équation (10)) dans laquelle est injectée l'expression du champ de déplacement virtuel discrétisé.

$$\delta\mathcal{W}^{int}_{el} = \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}) dv = \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \delta\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} dv = \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial (\boldsymbol{N}^f \delta\boldsymbol{u}^{el})}{\partial \boldsymbol{x}} dv \tag{45}$$

Pour plus de simplicité, l'expression du travail virtuel des efforts internes d'un seul nœud $\delta\mathcal{W}^{int}_{el_a}$ est considérée.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{int}_{el} = \sum_{a=1}^{N_n} \delta\mathcal{W}^{int}_{el_a}; \quad \delta\mathcal{W}^{int}_{el_a} &= \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial (N_a \delta\boldsymbol{u}_a)}{\partial \boldsymbol{x}} dv \\
&= \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\boldsymbol{u}_a \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}}{}^T) dv \\
&= \int_{v_{el}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{u}_a{}^T) dv \\
&= \int_{v_{el}} Tr(\delta\boldsymbol{u}_a{}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}}) dv \\
&= \delta\boldsymbol{u}_a{}^T \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}} dv
\end{aligned} \tag{46}$$

En considérant la même décomposition que dans l'équation (43), $\delta\mathcal{W}^{int}_{el}$ se réécrit :

$$\delta\mathcal{W}^{int}_{el} = \delta\boldsymbol{u}^{elT} \boldsymbol{f}^{int}_{el}; \quad \boldsymbol{f}^{int} = (\boldsymbol{f}^{intT}_{el_1}, \boldsymbol{f}^{intT}_{el_2}, ..., \boldsymbol{f}^{int}_{el_{N_n}}{}^T)^T \tag{47}$$

L'expression de l'effort nodal pour un nœud a de l'élément se déduit des équations (46) et (47).

$$\boldsymbol{f}_{el_a}^{int} = \int_{v_{el}} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{x}} dv \tag{48}$$

Comme pour la matrice de masse, les efforts internes nodaux sont également évaluables dans la configuration non déformée. Pour ce faire, l'expression du premier tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff (eq 32) est substituée dans l'équation (48).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{el_a}^{int} &= \int_{V_{el}} \frac{1}{J} \boldsymbol{P} \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} J dV \\ &= \int_{V_{el}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV = \int_{V_{el}} \boldsymbol{F} \boldsymbol{S} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV \end{aligned} \tag{49}$$

$\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{S}$ sont construits tels que $\boldsymbol{P} = \sum_a^{N_n} \boldsymbol{P}_a$ et $\boldsymbol{S} = \sum_a^{N_n} \boldsymbol{S}_a$.

Travail virtuel des efforts externes

L'équation (3.9) donne l'expression du travail virtuel des efforts externes, dans laquelle l'expression du champ de déplacement virtuel discrétisé est substituée.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_{el}^{ext} = \delta \boldsymbol{u}^{el^T} \boldsymbol{f}_{el}^{ext} &= \int_s \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} ds + \int_{v_{el}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} dv \\ &= \int_s \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} ds + \int_{v_{el}} \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} dv \\ &= \int_s \delta \boldsymbol{u}^{el^T} \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{t} ds + \int_{v_{el}} \delta \boldsymbol{u}^{el^T} \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{f} dv \\ &= \delta \boldsymbol{u}^{el^T} (\int_s \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{t} ds + \int_{v_{el}} \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{f} dv) \end{aligned} \tag{50}$$

Ainsi, l'expression des effort nodaux externes est donnée par :

$$\boldsymbol{f}_{el}^{ext} = \int_s \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{t} ds + \int_{v_{el}} \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{f} dv \tag{51}$$

Les efforts nodaux externes se réexpriment dans la configuration initiale en utilisant les équations (27), (3.3) et (29) :

$$\boldsymbol{f}_{el}^{ext} = \int_S \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{t_0} dS + \int_{V_{el}} J \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{f} dV \tag{52}$$

Afin de déterminer l'expression des efforts nodaux externes d'un élément associée aux vecteur contrainte $\boldsymbol{t_0}$ dans la configuration non-déformée du solide, il faut décomposer l'intégrale surfacique de l'équation (52) en contributions par face de l'élément fini (possédant N_f faces). Le vecteur contrainte associé à une face, noté $\boldsymbol{t_{0I}}$, permet de réécrire l'équation (52).

$$\boldsymbol{f}_{el}^{ext} = \sum_{I=1}^{N_f} \int_S \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{t_{0I}} dS + \int_{V_{el}} J \boldsymbol{N}^{f^T} \boldsymbol{f} dV \tag{53}$$

Le vecteur contrainte $\boldsymbol{t_{0I}}$ est non nulle uniquement sur les faces de l'élément fini appartenant à la surface extérieur du solide considéré.

ANNEXE 6 : MATRICE DE RAIDEUR TANGENTE

Dans la section 3.1.6, les résidus globaux sont définis comme la différence des efforts nodaux globaux internes et externes. La dérivée des résidus globaux fait apparaître la notion de matrice de raideur tangente globale, permettant d'approcher la solution des équations du mouvement, qui est détaillée dans cette Annexe. Pour simplifier les développements, la dérivation de la matrice de raideur tangente est réalisée pour un seul élément fini. L'expression ainsi trouvée est ensuite généralisée à un ensemble d'éléments finis en suivant les procédures classiques d'assemblage d'éléments finis (J N REDDY 2005). Les résidus d'un élément sont notés $\boldsymbol{r}^{el}$ et définis comme la différence des efforts nodaux internes et externes d'un élément ($\boldsymbol{r}^{el} = \boldsymbol{f}_{el}^{int} - \boldsymbol{f}_{el}^{ext}$). La matrice de raideur tangente élémentaire est obtenu en différenciant l'expression des résidus élémentaires par rapport à un déplacement nodal infinitésimale $d\boldsymbol{u}^{el}$.

La différenciation des résidus se dissocie en deux contributions, données par :

$$d\boldsymbol{r}^{el} = d\boldsymbol{f}_{el}^{int} - d\boldsymbol{f}_{el}^{ext} \tag{54}$$

Variation des efforts nodaux internes

La variation des efforts nodaux internes d'un élément est développé pour un seul nœud, la généralisation à tout l'élément est détaillée à la fin de cette Annexe. La variation de l'équation (49) donne :

$$d\boldsymbol{f}_{el_a}^{int} = \underbrace{\int_V \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S}\boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV}_{d\boldsymbol{f}_{el_a}^{mat}} + \underbrace{\int_V d\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV}_{d\boldsymbol{f}_{el_a}^{geo}} \tag{55}$$

L'équation (55) montre que la variation des efforts nodaux se décompose en deux contributions, la première permettant l'obtention de la matrice de raideur élastique $\boldsymbol{K}_{el}^{mat}$ et la seconde permettant d'obtenir la matrice de raideur géométrique $\boldsymbol{K}_{el}^{geo}$. Les efforts

nodaux tangentiels matériels $d\boldsymbol{f}_{el_a}^{mat}$ sont réécrits en introduisant la notation de Voight. Pour ce faire, l'égalité $\boldsymbol{FSN}_{a,\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AS}_{\boldsymbol{vc}}$ est posée, où $\boldsymbol{A}$ est la matrice à déterminer. Après développement et identification, il est possible de montrer que :

$$d\boldsymbol{f}_{el_a}^{mat} = \int_V \boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}}^T d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{vc}} dV \tag{56}$$

L'opérateur de Hooke permet ensuite de réécrire les efforts nodaux tels que :

$$d\boldsymbol{f}_{el_a}^{mat} = \int_V \boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{\mathcal{C}} d\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vd}} dV \tag{57}$$

D'après l'équation (3.31), la matrice de raideur tangente matériel est donc donnée par :

$$d\boldsymbol{f}_{el_a}^{mat} = \int_V \boldsymbol{B}_{a,\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{\mathcal{C}} \boldsymbol{B}_{,\boldsymbol{X}} dV d\boldsymbol{u}^{el} = \boldsymbol{K}_{el_a}^{mat} d\boldsymbol{u}^{el} \tag{58}$$

Le développement de la matrice de raideur géométrique est plus directe. En partant de l'équation (55), l'équation (3.29) permet de faire apparaître le déplacement nodal tel que :

$$d\boldsymbol{f}_{el_a}^{geo} = \sum_b^{N_n} d\boldsymbol{u}_b \int_V \boldsymbol{N}_{b,\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV \tag{59}$$

Afin de dériver une forme matricielle pour la matrice de raideur géométrique, on pose :

$$G_b^a = \int_V \boldsymbol{N}_{b,\boldsymbol{X}}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{N}_{a,\boldsymbol{X}} dV; \quad avec \quad a, b = 1, 2, ..., N_n \tag{60}$$

L'équation (59) peut alors être réécrite telle que :

$$d\boldsymbol{f}_{el_a}^{geo} = \boldsymbol{K}_{el_a}^{geo} d\boldsymbol{u}^{el}; \quad \boldsymbol{K}_{el_a}^{geo} = \left(G_1^a \boldsymbol{I_3}, G_2^a \boldsymbol{I_3}, ..., G_{N_n}^a \boldsymbol{I_3} \right) \tag{61}$$

Variation des efforts nodaux externes

La différenciation des efforts nodaux externes a du sens dans les cas où le chargement dépend de l'état de déformation de la structure. Dans cette thèse, les efforts considérés sont la gravité, des efforts ponctuels ou des efforts de pression. Seuls les efforts de pression dépendent de l'état de déformation d'un élément. C'est pourquoi seule la variation du terme surfacique des efforts nodaux externes (cf. équation (51)) est développée ici. Il est admis que la dépendance des efforts de pression à l'état de déformation est due au changement de normal, la valeur de la pression est donc considérée constante durant la déformation.

La contribution d'un nœud de l'élément aux efforts nodaux externes est donnée dans le repère courant, où la normale courante $\boldsymbol{n}$ apparait directement. De plus, une pression est définie par $-p\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{f}_a^{ext} = -\int_s N_a p \boldsymbol{n} ds = \sum_{I=1}^{N_f} -\int_s N_a p \boldsymbol{n}_I ds = \sum_{I=1}^{N_f} \boldsymbol{f}_{aI}^{ext} \tag{62}$$

Soit N_f le nombre de faces extérieures à la structure de l'élément considéré, la contribution d'un nœud aux efforts externes nodaux résulte de la somme sur toutes les faces de l'élément. Il est intéressant de définir un repère réduit ξ_I pour la face étudiée, défini dans la configuration non déformée du solide. Une face dans la configuration initiale est plane et en 2D, une surface avec trois ou quatre cotés est facilement paramétrable avec deux variables, notées ici ξ_{I1} et ξ_{I2} et variant tout deux entre -1 et 1. Le passage du repère réduit d'une face non déformée au repère général est possible grâce à la définition de l'élément de surface ds et de normale $\boldsymbol{n}_I$.

$$\boldsymbol{n}_I ds = \boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} \times \boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}} d\xi_{I1} d\xi_{I2} \tag{63}$$

Dans cette équation $\boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}}$ et $\boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}}$ sont des vecteurs contenant les dérivées de la position $\boldsymbol{x}$ par rapport aux coordonnées locales de la face considérée ($\boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} = (\frac{\partial x_1}{\partial \xi_{I1}}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_{I1}}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_{I1}})^T$). La variation des efforts nodaux externes induite par un déplacement nodal est donnée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{aI}^{ext} &= -\iint_{-1}^{1} (N_a p \boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} \times \boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}}) d\xi_{I1} d\xi_{I2} \\ d\boldsymbol{f}_{aI}^{ext} &= -\iint_{-1}^{1} N_a p (d\boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} \times \boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}} + \boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} \times d\boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}}) d\xi_{I1} d\xi_{I2} \end{aligned} \tag{64}$$

Les équations (3.23) et (3.28) permettent de réécrire les versions discrétisées des variations de position $\boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}}$ et $\boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}}$.

$$d\boldsymbol{f}_{aI}^{ext} = \sum_{b=1}^{N_n}(-\iint_{-1}^{1} N_a p(\frac{\partial N_b}{\partial \xi_{I1}} d\boldsymbol{u}_b^{el} \times \boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}} + \boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} \times d\boldsymbol{u}_b^{el} \frac{\partial N_b}{\partial \xi_{I2}}) d\xi_{I1} d\xi_{I2}) \tag{65}$$

La somme disparait car seulement pour b=a, $d\boldsymbol{u}_b^{el} \neq 0$

$$d\boldsymbol{f}_{aI}^{ext} = -\iint_{-1}^{1} N_a p(\frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}} d\boldsymbol{u}_a^{el} \times \boldsymbol{x}_{,\xi_{I2}} + \boldsymbol{x}_{,\xi_{I1}} \times d\boldsymbol{u}_a^{el} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}) d\xi_{I1} d\xi_{I2} \tag{66}$$

De la même manière que pour les efforts internes, l'objectif est de formuler la variation des efforts internes comme le produit d'une matrice et d'un vecteur de déplacement nodal. La matrice définie ici est la matrice de raideur des efforts externes. Soit l'égalité $d\boldsymbol{f}_{aI}^{ext} = \boldsymbol{K}_{aI}^{ext} d\boldsymbol{u}_a^{el}$, en développant l'équation (66) et en identifiant les termes, l'expression de la matrice de raideur des efforts externes pour un nœud induite par une pression sur une face est donnée tel que :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{aI}^{ext} &= -\iint_{-1}^{1} N_a p \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_{I2}} - \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_{I1}} & -\frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_{I2}} + \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_{I1}} \\ -\frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_{I2}} + \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_{I1}} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_{I2}} - \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_{I1}} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_{I2}} - \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_{I1}} & -\frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I1}}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_{I2}} + \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{I2}}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_{I1}} & 0 \end{pmatrix} d\xi_{I1} d\xi_{I2} \\
&= -\iint_{-1}^{1} N_a p \boldsymbol{H}_a d\xi_{I1} d\xi_{I2}
\end{aligned} \tag{67}$$

La matrice de raideur des efforts externes d'un nœud pour toutes les faces de l'élément s'obtient en sommant les contributions de chaque faces :

$$\boldsymbol{K}_a^{ext} = \sum_{I=1}^{N_f} \boldsymbol{K}_{aI}^{ext} \tag{68}$$

Cette matrice prend en compte les changements d'aire et d'orientation d'une surface induits par l'état de déformation.

Généralisation à l'élément

Afin de déterminer la variation des efforts internes totaux causée par un mouvement nodale quelconque, il faut sommer les contributions de chaque nœud de l'élément. Pour la composante matérielle des efforts internes, la sommation se réécrit en considérant une notation analogue à celle de l'équation (3.22) :

$$d\boldsymbol{f}^{mat} = \boldsymbol{K}^{mat} d\boldsymbol{u}^{el}; \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{K}^{mat} = \int_V \boldsymbol{B}_{,\boldsymbol{X}}^{el\ T} \boldsymbol{\mathcal{C}} \boldsymbol{B}_{,\boldsymbol{X}}^{el} dV \tag{69}$$

De la même manière,

$$d\boldsymbol{f}^{geo} = \boldsymbol{K}^{geo} d\boldsymbol{u}^{el}; \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{K}^{geo} = (\boldsymbol{K}_1^{geo}, \boldsymbol{K}_2^{geo}, ..., \boldsymbol{K}_{N_n}^{geo}) \tag{70}$$

et,

$$d\boldsymbol{f}^{ext} = \boldsymbol{K}^{ext} d\boldsymbol{u}^{el}; \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{K}^{ext} = \sum_{I=1}^{N_f} - \iint_{-1}^{1} p \boldsymbol{H}^{el} d\xi_{I1} d\xi_{I2} \tag{71}$$

$$\boldsymbol{H}^{el} = (N_1 \boldsymbol{H}_1, N_2 \boldsymbol{H}_2, ..., N_{N_n} \boldsymbol{H}_{N_n}) \tag{72}$$

ANNEXE 7 : DISCRÉTISATION DU TRAVAIL VIRTUEL LINÉIQUE POUR UN ÉLÉMENT

Afin d'établir les équations d'équilibre de la section de poutre, il faut introduire les expressions discrétisées des champs de déplacements et de déformations dans l'expression du travail virtuel (cf. équation (3.69)). Pour plus de clarté, les développements sont réalisés pour un seul élément. La généralisation à un ensemble d'éléments est abordée par la suite. La contribution des efforts externes au travail virtuel linéique pour un élément se réécrit telle que :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{*p}_{extel} &= \int_{S^p} \frac{\partial(\delta \boldsymbol{U}^{pT}\boldsymbol{p}^p)}{\partial X_1^p} dS^p = \int_{S^p} \delta\boldsymbol{U}^{pT}\frac{\partial \boldsymbol{p}^p}{\partial X_1^p} + \frac{\partial \delta\boldsymbol{U}^{pT}}{\partial X_1^p}\boldsymbol{p}^p dS^p \\
&= \delta\boldsymbol{G}_{el}^{p\,T} \underbrace{\int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\frac{\partial \boldsymbol{p}^p}{\partial X_1^p} dS^p}_{\frac{\partial \boldsymbol{P}^p_{el}}{\partial X_1^p}} + \frac{\partial \delta\boldsymbol{G}_{el}^{p\,T}}{\partial X_1^p} \underbrace{\int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\boldsymbol{p}^p dS^p}_{\boldsymbol{P}^p_{el}} \\
&+ \delta\boldsymbol{\eta}^{pT} \underbrace{\int_{S^p} \boldsymbol{Z}^{pT}\frac{\partial \boldsymbol{p}^p}{\partial X_1^p} dS^p}_{\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}} + \frac{\partial \delta\boldsymbol{\eta}^{pT}}{\partial X_1^p} \underbrace{\int_{S^p} \boldsymbol{Z}^{pT}\boldsymbol{p}^p dS^p}_{\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}
\end{aligned} \tag{73}$$

Dans l'équation ci-dessus, le vecteur $\boldsymbol{P}^p_{el}$ et sa dérivée représentent les efforts nodaux de l'élément. Il est possible de transformer les termes de l'équation (73) associés au mouvement de corps rigide afin de faire apparaître le vecteur de déformation d'une section de poutre $\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc}$:

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}+\frac{\partial\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p &= \delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}+\frac{\partial\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p+\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p-\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p\\ &= \delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}-\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p+\delta(\boldsymbol{\eta}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}+\frac{\partial\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}}{\partial X_1^p})\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p\\ &= \delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}-\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p+\delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pcT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p\end{aligned}\tag{74}$$

Le travail linéique des efforts externes se réécrit alors :

$$\delta\mathcal{W}_{extel}^{*p}=\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}-\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p+\delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pcT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p+\delta{\boldsymbol{G}_{el}^p}^T\frac{\partial{\boldsymbol{P}_{el}^p}^p}{\partial X_1}+\frac{\partial\delta{\boldsymbol{G}_{el}^p}^T}{\partial X_1^p}\boldsymbol{P}_{el}^p\tag{75}$$

Afin de résoudre l'équilibre de la section, le travail linéique virtuel des efforts externes se réexprime de manière matricielle tel que :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{extel}^{*p} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial\delta{\boldsymbol{G}_{el}^p}^T}{\partial X_1^p} & \delta{\boldsymbol{G}_{el}^p}^T & \delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pcT}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{el}^p\\ \frac{\partial\boldsymbol{P}_{el}^p}{\partial X_1^p}\\ \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p\end{pmatrix}+\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}-\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial\delta\boldsymbol{G}_{el}^p}{\partial X_1^p}\\ \delta\boldsymbol{G}_{el}^p\\ \delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{el}^p\\ \frac{\partial\boldsymbol{P}_{el}^p}{\partial X_1^p}\\ \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p\end{pmatrix}+\delta\boldsymbol{\eta}^{pT}(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X_1^p}-\boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p)\end{aligned}\tag{76}$$

L'expression discrétisée du travail virtuel des efforts internes pour un élément est donnée par :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{intel}^{*p} &= \int_{S^p}\boldsymbol{\sigma}^p:\delta\boldsymbol{\epsilon}^p dS^p=\int_{S^p}\delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pT}{\boldsymbol{\sigma_{vc}}}^p dS^p=\int_{S^p}\delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^p dS^p\\ &= \int_{S^p}(\boldsymbol{S}^p\boldsymbol{Z}^p\delta{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}+\boldsymbol{B}^s{\boldsymbol{N_s}}^p\delta\boldsymbol{G}_{el}^p+\boldsymbol{S}^p{\boldsymbol{N_s}}^p\frac{\partial\delta\boldsymbol{G}_{el}^p}{\partial X_1^p})^T\\ &\quad\boldsymbol{\mathcal{C}^s}(\boldsymbol{S}^p\boldsymbol{Z}^p{\boldsymbol{\epsilon_{vd}}}^{pc}+\boldsymbol{B}^s{\boldsymbol{N_s}}^p\boldsymbol{G}_{el}^p+\boldsymbol{S}^p{\boldsymbol{N_s}}^p\frac{\partial\boldsymbol{G}_{el}^p}{\partial X_1^p})dS^p\end{aligned}\tag{77}$$

Le développement de cette équation fait émerger 9 termes amenant à la définition de 6 matrices listées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^p_{el} &= \int_{S^p} \boldsymbol{Z}^{pT}\boldsymbol{S}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}\boldsymbol{S}^p\boldsymbol{Z}^p dS^p; \quad \boldsymbol{Q}^p_{el} = \int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\boldsymbol{B}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}\boldsymbol{S}^p\boldsymbol{Z}^p dS^p \\
\boldsymbol{E}^p_{el} &= \int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\boldsymbol{B}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}\boldsymbol{B^s}\boldsymbol{N_s}^p dS^p; \quad \boldsymbol{C}^p_{el} = \int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\boldsymbol{S}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}\boldsymbol{B^s}\boldsymbol{N_s}^p dS^p \\
\boldsymbol{L}^p_{el} &= \int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\boldsymbol{S}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}\boldsymbol{S}^p\boldsymbol{Z}^p dS^p; \quad \boldsymbol{M}^p_{el} = \int_{S^p} \boldsymbol{N_s}^{pT}\boldsymbol{S}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{C}^s}\boldsymbol{S}^p\boldsymbol{N_s}^p dS^p
\end{aligned} \tag{78}$$

Ces matrices permettent d'exprimer le travail virtuel linéique interne tel que :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}^{*p}_{intel} = {} & \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pcT}\boldsymbol{A}^p_{el}\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} + \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pcT}\boldsymbol{Q}^{p\,T}_{el}\boldsymbol{G}^p_{el} + \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pcT}\boldsymbol{L}^{p\,T}_{el}\frac{\partial\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\
& + \delta\boldsymbol{G}^{p\,T}_{el}\boldsymbol{Q}^p_{el}\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} + \delta\boldsymbol{G}^{p\,T}_{el}\boldsymbol{E}^p_{el}\boldsymbol{G}^p_{el} + \delta\boldsymbol{G}^{p\,T}_{el}\boldsymbol{C}^{p\,T}_{el}\frac{\partial\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\
& + \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}^{p\,T}_{el}}{\partial X^p_1}\boldsymbol{L}^p_{el}\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}^{p\,T}_{el}}{\partial X^p_1}\boldsymbol{C}^p_{el}\boldsymbol{G}^p_{el} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}^{p\,T}_{el}}{\partial X^p_1}\boldsymbol{M}^p_{el}\frac{\partial\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1}
\end{aligned} \tag{79}$$

Ou alors sur forme matricielle :

$$\delta\mathcal{W}^{*p}_{intel} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \delta\boldsymbol{G}^p_{el} \\ \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^p_{el} & \boldsymbol{C}^p_{el} & \boldsymbol{L}^p_{el} \\ \boldsymbol{C}^{p\,T}_{el} & \boldsymbol{E}^p_{el} & \boldsymbol{Q}^p_{el} \\ \boldsymbol{L}^{p\,T}_{el} & \boldsymbol{Q}^{p\,T}_{el} & \boldsymbol{A}^p_{el} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \boldsymbol{G}^p_{el} \\ \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix} \tag{80}$$

L'expression finale du travail virtuel linéique discrétisée d'un élément ($\delta\mathcal{W}^{*p}_{el} = 0$)

$$\delta\mathcal{W}^{*p}_{el} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \delta\boldsymbol{G}^p_{el} \\ \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^p_{el} \\ \frac{\partial\boldsymbol{P}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p \end{pmatrix} + \delta\boldsymbol{\eta}^{pT}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p}{\partial X^p_1} - \boldsymbol{t}^{pT}\boldsymbol{\mathcal{F}_s}^p\right) - \begin{pmatrix} \frac{\partial\delta\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \delta\boldsymbol{G}^p_{el} \\ \delta\boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^p_{el} & \boldsymbol{C}^p_{el} & \boldsymbol{L}^p_{el} \\ \boldsymbol{C}^{p\,T}_{el} & \boldsymbol{E}^p_{el} & \boldsymbol{Q}^p_{el} \\ \boldsymbol{L}^{p\,T}_{el} & \boldsymbol{Q}^{p\,T}_{el} & \boldsymbol{A}^p_{el} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\boldsymbol{G}^p_{el}}{\partial X^p_1} \\ \boldsymbol{G}^p_{el} \\ \boldsymbol{\epsilon_{vd}}^{pc} \end{pmatrix} \tag{81}$$

ANNEXE 8 : VARIATION VIRTUELLE DES MESURES DE DÉFORMATIONS GÉNÉRALISÉES

Dans cette Annexe, les variations virtuelles des mesures de déformations généralisée sont développées, Pour commencer, la variation virtuelle de la composante translationnelle de la mesure de déformation généralisée dans le repère courant (cf. équation (3.122)) est exprimée telle que :

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\gamma}^p &= \delta(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} - \boldsymbol{e_1}^p) \\
&= \frac{\partial \delta\boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} - \delta(\boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{E_1}^p) \\
&= \frac{\partial \delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1} - \delta\boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{E_1}^p \\
&= \frac{\partial \delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1} - \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p \boldsymbol{\Lambda}^p \boldsymbol{E_1}^p \\
&= \frac{\partial \delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1} - \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p \boldsymbol{e_1}^p \\
&= \frac{\partial \delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1} + \tilde{\boldsymbol{e_1}}^p \delta\boldsymbol{\theta_e}^p
\end{aligned} \tag{82}$$

Dans le repère matériel, la variation de l'équation (3.122) donne :

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\Gamma}^p &= \delta(\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\gamma}^p) \\
&= \delta\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\gamma}^p + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\boldsymbol{\gamma}^p \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^{pT}\boldsymbol{\gamma}^p + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}(\frac{\partial\delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1} - \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_e{}^p\boldsymbol{e_1}^p) \\
&= -\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p(\frac{\partial\boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} - \boldsymbol{e_1}^p) + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}(\frac{\partial\delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1} - \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_e{}^p\boldsymbol{e_1}^p) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}(-\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p\frac{\partial\boldsymbol{x}_0^p}{\partial X_1} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1}) = \boldsymbol{\Lambda}^{pT}(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{x}}_0^p}{\partial X_1}\delta\boldsymbol{\theta}_e{}^p + \frac{\partial\delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1}) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{x}}_0^p}{\partial X_1}\boldsymbol{T}^{\Lambda p}\delta\boldsymbol{\phi_c}^p + \frac{\partial\delta\boldsymbol{U_c}^p}{\partial X_1})
\end{aligned} \tag{83}$$

Pour les composantes rotationnelles des déformations généralisées de la poutre, le point de départ est l'équation (3.112), reliant la dérivée de la matrice de rotation à la courbure de la poutre exprimée dans la base courante.

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p &= \delta(\frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^{pT}) \\
&= \delta\frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^{pT} + \frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\delta\boldsymbol{\Lambda}^{pT} \\
&= \frac{\partial\delta\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^{pT} - \frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p \\
&= \frac{\partial\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^p\boldsymbol{\Lambda}^{pT} + \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p\frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^{pT} - \frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}^p}{\partial X_1^p}\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p \\
&= \frac{\partial\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p}{\partial X_1^p} + \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p - \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p
\end{aligned} \tag{84}$$

Afin d'exprimer la forme vectorielle de la matrice antisymétrique $\delta\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^p$, il est important de rappeler la propriété mathématique suivante : soient deux matrices antisymétriques $\tilde{\boldsymbol{A}}$ et $\tilde{\boldsymbol{B}}$ et leurs formes vectorielles $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, alors :

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} - \tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{A}}; \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{85}$$

L'équation (84) devient alors :

$$\delta\boldsymbol{\kappa}^p = \frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta_e}^p}{\partial X_1^p} + \delta\boldsymbol{\theta_e}^p \times \boldsymbol{\kappa}^p = \frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta_e}^p}{\partial X_1^p} - \tilde{\boldsymbol{\kappa}^p}\delta\boldsymbol{\theta_e}^p \tag{86}$$

L'expression de $\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p$ s'obtient à l'aide de la matrice $\boldsymbol{\Lambda}^p$ telle que :

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p &= \delta(\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\kappa}^p) \\
&= \delta\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{\kappa}^p + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\boldsymbol{\kappa}^p \\
&= -\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p\boldsymbol{\kappa}^p + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta_e}^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}_e}^p\boldsymbol{\kappa}^p \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta_e}^p}{\partial X_1^p} = \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\delta(\boldsymbol{T}^{\Lambda p}\boldsymbol{\phi_c}^p)}{\partial X_1^p} \\
&= \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{T}^{\Lambda p}\frac{\partial\delta\boldsymbol{\phi_c}^p}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\delta\boldsymbol{T}^{\Lambda p}}{\partial X_1^p}\delta\boldsymbol{\phi_c}^p
\end{aligned} \tag{87}$$

L'expression finale des déformations généralisées de la poutre se réécrit sous forme matricielle telle que :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon_{ve}}^{pc} = \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\gamma}^p \\ \delta\boldsymbol{\kappa}^p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X_1} & \tilde{\boldsymbol{e_1}^p} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1^p} - \tilde{\boldsymbol{\kappa}^p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{U_c}^p \\ \delta\boldsymbol{\theta_e}^p\end{pmatrix} \tag{88}$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon_{ve}}^{pc} = \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\Gamma}^p \\ \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial}{\partial X_1^p} & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{x}_0^p}}{\partial X_1} \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial}{\partial X_1^p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{U_c}^p \\ \delta\boldsymbol{\theta_e}^p\end{pmatrix} \tag{89}$$

$$= \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\Gamma}^p \\ \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial}{\partial X_1^p} & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{x}_0^p}}{\partial X_1}\boldsymbol{T}^{\Lambda p} \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\boldsymbol{T}^{\Lambda p}\frac{\partial}{\partial X_1^p} + \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\frac{\partial\boldsymbol{T}^{\Lambda p}}{\partial X_1^p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{U_c}^p \\ \delta\boldsymbol{\phi_c}^p\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\Gamma}^p \\ \delta\boldsymbol{\mathcal{K}}^p\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}^{pT} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{pT}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X_1^p} & \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{x}_0^p}}{\partial X_1}\boldsymbol{T}^{\Lambda p} \\ 0 & \boldsymbol{T}^{\Lambda p}\frac{\partial}{\partial X_1^p} + \frac{\partial\boldsymbol{T}^{\Lambda p}}{\partial X_1^p}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{S}^p}\delta\boldsymbol{\eta}^p \tag{90}$$

COLLEGE SCIENCES
DOCTORAL DE LA MER
BRETAGNE ET DU LITTORAL

UBO
Université de Bretagne Occidentale

Titre : Modélisation par poutre équivalente anisotrope des hydrofoils composites : du couplage fluide-structure vers l'optimisation des performances hydrodynamiques

Mot clés : Hydrofoils, matériaux composites, interaction fluide-structure, couplage flexion-torsion, optimisation, éléments finis.

Résumé : En navigation, les foils sont soumis à d'importants efforts hydrodynamiques et, en conséquence, se déforment de manière significative. Cette thèse s'intéresse çà l'optimisation de designs de foils souples en matériaux composites, qui dans certaines conditions, sont caractérisés par un couplage flexion-torsion influant sur l'angle d'attaque d'un foil déformé. Cette thèse présente une méthodologie pour estimer et optimiser numériquement les performances d'un hydrofoil souple. Le modèle numérique retenu dans cette thèse est un couplage entre un modèle de poutre équivalente développé dans Abaqus™ et un code fluide parfait, *PUFFIn*. Deux campagnes expérimentales sont réalisées pour valider les modèles numériques. Une première en air pour valider le modèle de poutre équivalente et une seconde dans le bassin de courant de l'Ifremer de Boulogne-Sur-mer, permettant la validation du couplage entre *PUFFIn* et Abaqus™. Ce modèle est ensuite exploité pour optimiser la structure et la géométrie d'un hydrofoil souple et pour finir, une validation des outils numériques développés dans cette thèse, ayant pour but de s'affranchir du logiciel commercial Abaqus™, est présentée.

Title: Anisotropic equivalent beam modeling of composite hydrofoils: from fluid-structure interaction to hydrodynamic performance optimization

Keywords: Hydrofoils, composite materials, fluid-structure interaction, bend-twist coupling, optimization, finite elements.

Abstract: In sailing conditions, foils are subjected to significant hydrodynamic forces and, as a result, undergo substantial deformation. This thesis focuses on the optimization of flexible foil designs made from composite materials, which, under certain conditions, exhibit a bending-torsion coupling that affects the angle of attack of a deformed foil. This thesis presents a methodology for numerically estimating and optimizing the performance of a flexible hydrofoil. The numerical model used in this work couples an equivalent beam model developed in Abaqus™ with a potential flow code, *PUFFIn*. Two experimental campaigns are conducted to validate the numerical models: the first in air, to validate the equivalent beam model, and the second in the current tank at Ifremer in Boulogne-sur-Mer, enabling the validation of the coupling between *PUFFIn* and Abaqus™. This model is then used to optimize the structure and geometry of a flexible hydrofoil. Finally, the thesis presents a validation of the numerical tools developed, with the aim of moving beyond the use of the commercial software Abaqus™.